Das PANaMa-Projekt
–
PANaMa-Projektet

Hrsg.
Dr. Stefanie Herzog
Dr. Marc Wilken

Mathematik im beruflichen Kontext: Aufgaben im Mathematikunterricht

Matematik i det professionelle kontekst: opgaver i matematikundervisning

Vorwort

Im Projekt PANaMa (Perspektiven am Arbeitsmarkt mit Naturwissenschaften und Mathematik) sind bereits 3 Bände erschienen, die Ideen zu vielfältigen und facettenreichen Möglichkeiten liefern sollen, wie Berufsorientierung in den Schulalltag der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer sowie weiterreichende Bildungsangebote integriert werden kann. Im ersten Band wurden eine Erläuterung der wissenschaftlichen Grundlagen für die Ideen im Projekt sowie Kurzbeschreibungen konkreter Umsetzungen thematisiert. Band 3 legte den Schwerpunkt auf die intensive Vermittlung von Digitalisierung im Rahmen eines mehrtägigen außerschulischen Angebots, welches adaptiert aber auch in den Unterricht eingebunden werden kann. Nachdem in Band 2 naturwissenschaftliche Lehrmaterialien im Fokus standen, sollen in diesem Band verschiedene Unterrichtsmaterialien für den Mathematikunterricht im Bereich beruflicher Kontexte aufgezeigt werden. Dazu wurden verschiedene Szenarien gewählt, die mathematische Probleme an Beschäftigte in unterschiedlichen Berufen stellen. So kann sich ein*e Industriemechaniker*in aus mathematischer Sicht mit der materialeffizientesten Art des Ausstanzens bestimmter Produktionsteile aus einer vorgegebenen Materialplatte beschäftigen oder sich für die individuelle Reparatur eines Fertigteils mit mathematischen Formen befassen. Ein*e Landwirt*in könnte sich mit Hilfe des Wissens um die Berechnungsmöglichkeiten in Excel-Tabellen eine Kostenberechnungstabelle erstellen, um z.B. im eigenen Mastbetrieb produktiv zu bleiben, muss aber gleichzeitig auch nachvollziehen können, ob die dort hinterlegten Funktionen zum gewünschten Ergebnis führen. Ebenso kann in der Pflanzenzüchtung eine Überprüfung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Kombinationen in der Vererbung hilfreich sein.

Die vorliegenden exemplarischen Aufgaben sind als Ideen zu verstehen und können meist auch auf anderem als dem vorgeschlagenen Weg gelöst werden. Sie zeigen aber die Bandbreite auf, bei der sich verschiedene Berufsgruppen mit mathematischen Fragen beschäftigen könnten und verdeutlichen daher ganz im Sinne des Projekts die Relevanz des Faches Mathematik für den zukünftigen Berufsalltag jetziger Schüler*innen und möglichen späteren Fachkräften in regionalen Unternehmen.

Die Aufgaben entstanden mit Bezug zu den mathematischen Lerninhalten an Schulen in Schleswig-Holstein und könnten nur bedingt auf den Unterricht an dänischen Schulen übertragen werden. Daher haben wir an dieser Stelle auf eine Übersetzung ins Dänische verzichtet.

Projektkoordination und Herausgeber

Dr. Stefanie Herzog — Dr. Marc Wilken

Forord

Indenfor projektet PANaMa (Perspektiver for Arbejdsmarkedet med Naturvidenskab og Matematik) er der allerede offentliggjort 3 bind, som skal give idéer til forskellige og mangfoldige muligheder for, hvordan erhvervsorienterede foranstaltninger kan indgå i skolehverdagen indenfor matematik og naturvidenskabelige fag samt videregående uddannelsestilbud. I det første bind handlede det om at redegøre for det videnskabelige grundlag for idéerne i projektet samt korte beskrivelser af konkrete implementeringstiltag. Bind 3 fokuserede på intensiv formidling af emnet digitalisering i forbindelse med nogle ekstra læringstilbud henover flere dage uden for selve skoleundervisningen, dog således, at indholdet ikke kun kan adapteres, men også decideret integreres i undervisningen i klasseværelset. Efter at der i bind 2 var fokus på videnskabeligt undervisningsmateriale, er nærværende bind beregnet til at give en fremstilling af forskellige undervisningsmaterialer til matematikundervisningen sammenholdt med en erhvervsfaglig kontekst. I den forbindelse er der valgt forskellige scenarier, som konfronterer medarbejdere i forskellige erhverv med matematiske problemstillinger. En industrimekaniker kan således fra en matematisk synsvinkel beskæftige sig med den mest materialebesparende måde at udstanse bestemte produktionsdele fra et givet pladeemne af det pågældende materiale – eller interessere sig for at reparere en færdig komponent på en individuel måde ud fra nogle matematiske former. En landmand kunne bruge viden om beregningsmulighederne i Excel-tabeller til at oprette en tabel til beregningaf omkostningerne for sin opfedningsbedrift med henblik på at skabe og opretholde overskud – men samtidig være i stand til at vurdere, om de i systemet indlagrede funktioner nu også fører til det ønskede resultat. Ligesom det indenfor planteavl kan være nyttigt at kontrollere sandsynligheden for, at visse kombinationer forekommer i forbindelse med nedarvning.

De her givne eksempler på opgaver skal forstås som idéer og vil normalt også kunne løses på andre måder end den her foreslåede. De viser imidlertid den brede mangfoldighed med hensyn til, hvor forskellige faggrupper kan (have nytte af at) beskæftige sig med matematiske spørgsmål, og illustrerer således helt i overénsstemmelse med projektets målsætning, i hvor høj grad faget matematik er relevant for nuværende elevers fremtidige erhvervsarbejde – og muligheden for at få kvalificeret arbejdskraft og specialister til det regionale erhvervsliv.

Opgaverne er udarbejdet med reference til det matematiske læringsindhold på skoler i Slesvig-Holstén og kan kun i begrænset omfang overføres til undervisningen på danske skoler – hvorfor vi i dette tilfælde har besluttet ikke at få materialet oversat til dansk.

Projektkoordinering og udgiver

Dr. Stefanie Herzog | Dr. Marc Wilken

I. Einführung

Frau Müller, warum müssen wir überhaupt Mathe machen? Berufsorientierung und -vorbereitung im Mathematikunterricht mit Hilfe berufsbezogener Modellierungsaufgaben

Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier, IPN

Die Frage nach dem Sinn oder Unsinn von Mathematikunterricht ist eine, die so manch einer Lehrkraft seitens ihrer Schüler*innen, aber auch seitens der Eltern oder (fachfremden) Kolleg*innen gestellt wird. Viele Inhalte kommen zumindest oberflächlich ohne Lebensweltbezug daher, sodass den Schüler*innen eine Motivation jenseits der Benotung durch die Lehrkraft fehlt, sich intensiver mit der Mathematik auseinanderzusetzen. *Non scholae, sed vitae discimus* kann hier als Argument meist nicht überzeugen, da den Schüler*innen das Wissen über den Anwendungsbezug von Mathematik in beruflichen und gesellschaftlichen Situationen häufig unbekannt ist. Bildungstheoretische Ansätze (z. B. Grunderfahrungen nach Winter, 1995; Allgemeinbildungskonzept nach Heymann, 1997) werden als unstrittige Grundlage zur Legitimation von Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen herangezogen, adressieren damit aber nicht die Schüler*innen selbst. Für viele von ihnen scheint Mathematik, insbesondere die der höheren Klassenstufen, für die eigene berufliche Karriere und gesellschaftliche Teilhabe weitestgehend irrelevant. Die für die meisten (Ausbildungs-)Berufe wesentlichen fach-mathematischen Inhalte werden in der Regel bis zur 7. Klassenstufe behandelt. Dass die Vorbereitung auf die Berufsausbildung dennoch nicht hinreichend funktioniert, zeigt sich an vielen Ausbildungsabbrüchen durch die Auszubildenden, die dafür am häufigsten fehlerhafte Berufsvorstellungen angeben (BIBB, 2018). Es stellt sich daher die Frage, wie den Schüler*innen die nachweisbare Relevanz von Mathematikunterricht für die eigene berufliche Karriere erfahrbar gemacht werden kann.

Wie könnte ein Berufsbezug im allgemeinbildenden Mathematikunterricht aussehen? Mathematikunterricht wird aktuell stark mit der Zielsetzung einer mathematischen Grundbildung *(mathematical literacy)* verbunden. Damit ist gemeint, dass die Schüler*innen nicht nur fachlich-mathematische Inhalte erwerben, sondern diese auch in verschiedenen Kontexten anwenden können. Das sogenannte kompetenzorientierte Verständnis von Mathematik dient als Grundlage für die bundesweiten Bildungsstandards (z. B. KMK, 2003). Ihre Einführung begünstigte entsprechend eine zunehmende Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht. Insofern scheint eine geradezu optimale Ausgangssituation vorzuliegen, um die von der KMK empfohlene berufliche Orientierung (KMK, 2017) durch den Einsatz realistischer beruflicher Kontexte in den Mathematikunterricht zu unterstützen. Neben der orientierenden Funktion (Berufsorientierung) könnte ein Einsatz beruflicher Kontexte auch zur Berufsvorbereitung im engeren Sinne beitragen (siehe Lindmeier, 2019 im Band 1 dieser Reihe). Aus Sicht des Fachs wirkt eine Lerngelegenheit dann berufsvorbereitend, wenn die Schüler*innen in der Auseinandersetzung mit ihr mathematische Kompetenzen erwerben, die sich für die spätere Berufsbildung als anschlussfähig erweisen.

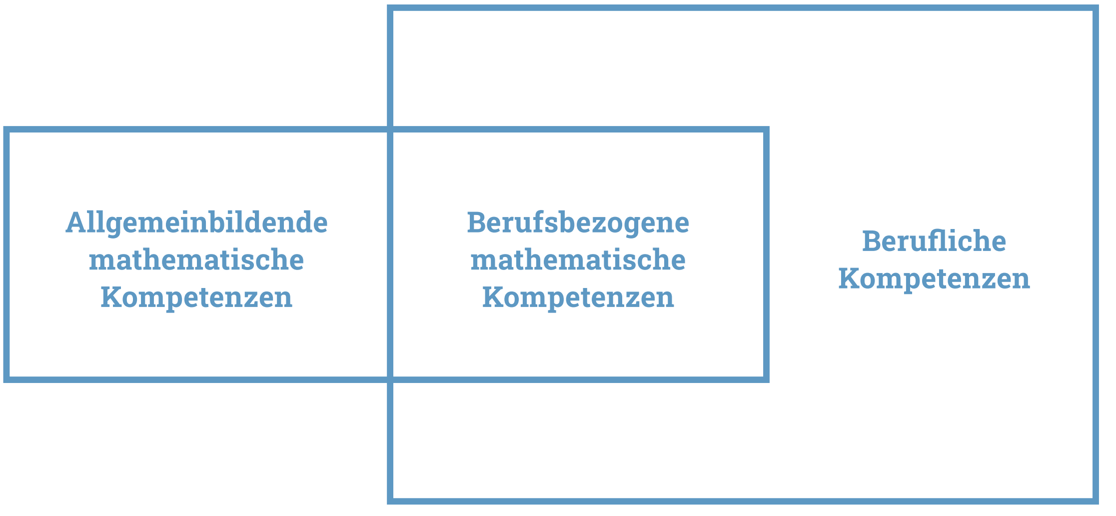


Abb. 1: Zusammenhang zwischen den verschiedenen für die Kompetenzentwicklung in der beruflichen Ausbildung relevanten Kompetenzbereiche (nach Neumann et al. 2013)

Doch wie sind solche „anschlussfähigen Kompetenzen“ zu verstehen? Es tritt am Übergang in die Berufsbildung die Schwierigkeit auf, dass die verschiedenen Systeme „Allgemeinbildung“ und „Berufsbildung“ in Deutschland voneinander getrennt sind. Deswegen ist beiderseitig das Wissen über die Ziele und Charakteristika des abgebenden oder übernehmenden Systems häufig nur grob vorhanden. Am Übergang Schule – Beruf stehen sich beispielsweise zwei unterschiedliche Kompetenzbegriffe gegenüber: die eher wissensorientierten allgemeinbildenden mathematischen Kompetenzen auf Seiten der Schule und die eher handlungsorientierten beruflichen Kompetenzen auf der anderen Seite. Man spricht jemandem hohe berufliche Kompetenzen zu, wenn er oder sie berufliche Probleme bewältigen kann. Diese können – man denke an kaufmännische oder technische Berufe – auch die Anwendung von Mathematik erfordern, sie erfordern aber darüber hinaus eine Menge anderen Wissens und anderer Fähigkeiten.

Im schulischen Kontext sind Lernende kompetent, wenn sie die Schulmathematik beherrschen und damit typische schulmathematische Anforderungen bewältigen können. Da Schule explizit auch auf berufliche Anforderungen vorbereiten soll (wenn auch nicht exklusiv), sollte es im Idealfall einen Überlappungsbereich zwischen schulischen und beruflichen mathematischen Anforderungen geben. Neumann et al. (2013) schlagen daher ein Konzept der *berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenzen* für schulische mathematische Kompetenzen, die anschlussfähig an berufliche Kompetenzen sind, vor. Wenn jemand diese Kompetenzen hat, dann sollte ein kontinuierlicher Kompetenzerwerb über die unterschiedlichen Bildungsinstitutionen hinweg möglich sein (siehe Abb. 1). Es scheint im Sinne der Berufsvorbereitung somit sinnvoll, solche berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenzen bereits während des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts auszubilden. Das kann gelingen, wenn es Lerngelegenheiten gibt, die berufliche Themen aufgreifen.

Worin liegt die Schwierigkeit bei der Behandlung solcher Lerngelegenheiten? Aus Sicht der Bildungsstandards erfordern Aufgaben mit Bezug zu Sachkontexten die Anwendung von mathematischen Modellierungskompetenzen und werden in der Regel als Modellierungsaufgaben bezeichnet (für einen Überblick siehe Borromeo Ferri, Greefrath & Kaiser, 2013). Beim mathematischen Modellieren müssen Probleme aus der realen Welt mit Hilfe von mathematischen Mitteln gelöst und die mathematischen Resultate wieder in Problemlösungen transferiert werden. Das Vorgehen kann idealtypisch in einem sogenannten Modellierungskreislauf dargestellt werden (etwa nach Blum & Leiß, 2005, siehe Abb. 2). Es können dabei die sieben Teilschritte *Konstruieren/Verstehen, Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, Mathematisch arbeiten, Interpretieren, Validieren und Darlegen* und *Interpretieren* unterschieden werden. Auch wenn selten die Teilschritte beim Bearbeiten einer Modellierungsaufgabe linear ausgeführt werden und beispielsweise Teile des Kreislaufs auch mehrfach durchlaufen werden können, gibt der Kreislauf eine Orientierung, welche Schritte die Schüler*innen auf dem Weg vom realen Problem bis zu einer tragfähigen Lösung leisten müssen.

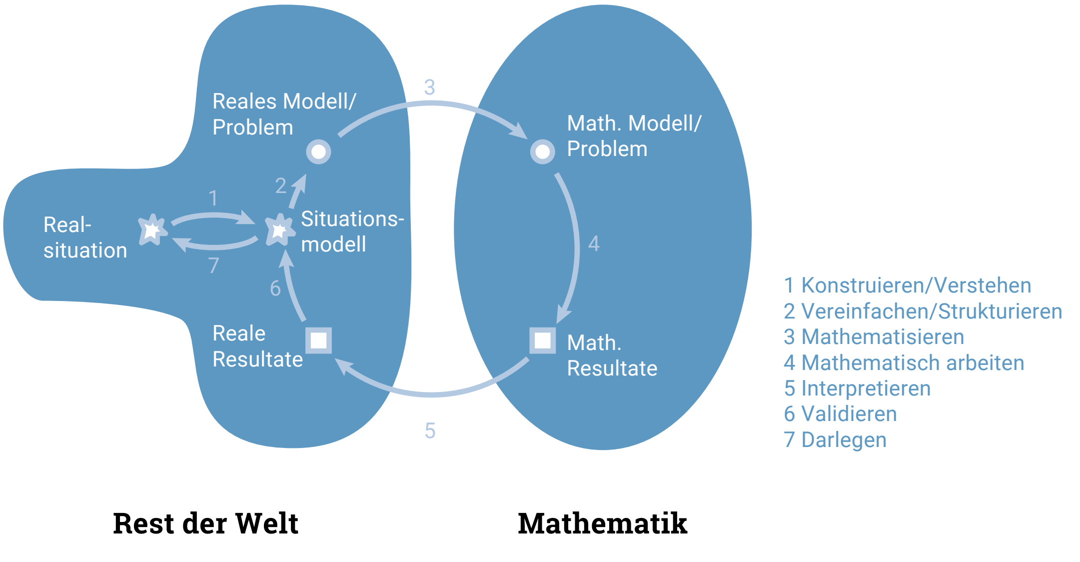


Abb. 2: Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß (2005)

Die hier vorgestellte Aufgabensammlung aus dem Projekt PANaMa soll Schüler*innen aller weiterführenden Schulformen Gelegenheiten bieten, im Rahmen des Mathematikunterrichts authentische berufliche Anforderungen kennenzulernen. Dazu nehmen die Aufgaben die Perspektive von beruflichen Betrieben bzw. von Auszubildenden und Mitarbeiter*innen dieser Betriebe ein. Die aufgezeigten Kontexte stellen (möglichst wenig vereinfachte) authentische

Situationen dar, in denen innerhalb eines beruflichen Betriebs Mathematik eine zentrale Rolle spielt: Es werden Probleme eingeführt, die „in echt" mit Mathematik gelösten werden. Auf diese Weise soll Mathematik als sinnstiftend erlebt werden, nicht als isolierter Stoff, sondern eng verbunden mit dem jeweiligen beruflichen Kontext. Es entstehen Lerngelegenheiten, die auf berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen abzielen und en passant einen Beitrag zur Berufsorientierung und -vorbereitung leisten. So können Schüler*innen die Relevanz von Mathematik in vielfältigen beruflichen Kontexten kennenlernen und Anwendungsbezüge zu möglichen Arbeitsfeldern herstellen.

Insgesamt finden sich 43 Aufgaben auf den folgenden Seiten. Wir geben zunächst einen kleinen Überblick über die Materialsammlung und stellen dann anhand einer Aufgabe einen möglichen Einsatz der Aufgaben vor. Die Aufgaben bilden drei in der Region des PANaMa-Projekts besonders relevante Berufsfelder ab (*High-Tech-Materialien* mit 11 Aufgaben, *Landwirtschaft & Ernährung* mit 27 Aufgaben sowie *Erneuerbare Energien* mit 5 Aufgaben) und fokussieren in der Regel einen speziellen Ausbildungsberuf des entsprechenden Feldes. So befasst sich in dieser Aufgabensammlung zum Beispiel eine Auszubildende zur Malerin und Lackiererin mit der Fläche eines Autos, dessen Lack mit einer Nanoversiegelung versehen wird. Ein Tierwirt berechnet und optimiert die Kosten für seine Schweinemast mit Hilfe einer Excel-Datei. Und ein*e Energieberater*in unterstützt eine Familie bei der Entscheidung, auf welchen Brennstoff sie die Heizanlage ihres Hauses umstellen sollen. Grundsätzlich richten sich die Aufgaben an Lernende aller Schulformen der Sekundarstufe. Dies schließt neben den allgemeinbildenden Schulformen (Gymnasium und Gemeinschaftsschulen in Schleswig-Holstein) auch das berufliche Bildungswesen mit ihrer Vielzahl an Schulformen mit ein (etwa berufliches Gymnasium oder Berufsfachschulen).

Jede Aufgabe bildet also ein bestimmtes Themenfeld eines Berufs ab. Dieses ist für die Nutzung im Schulunterricht aufbereitet, sodass die Aufgabe möglichst eigenständig bearbeitet werden kann. Die Aufgabe liefert zunächst aus einem Informationstext, der in das Thema und das Berufsbild einführt und dabei relevante Hintergrundinformationen nennt. Arbeitsaufträge strukturieren im Folgenden die Bearbeitung. Eine Lösungsskizze gibt Hinweise im Sinne eines Erwartungshorizonts. Durch den Charakter der Aufgaben als Modellierungsaufgaben sind die Lösungsskizzen nur als Orientierungsrahmen für die Lehrkraft zu verstehen, denn es sind häufig mehrere Lösungsansätze denkbar. Sollen die Lernenden selbst die Lösungsskizzen nutzen, so ist der Umgang damit gut vorzubereiten. Ein Kommentar in der Art eines knappen Aufgabensteckbriefs soll der Lehrkraft die Auswahl und Implementation der jeweiligen Aufgabe in den Unterricht erleichtern. Entlang einer beispielhaften Aufgabe wird im Folgenden das Potenzial der Aufgaben sowie deren Nutzungsmöglichkeit aufgezeigt.

Die Aufgabe „Modellierung eines Zylinderkopfes" (Aufgabe 10, siehe Seite 54) befasst sich beispielsweise mit dem Thema Kostenplanung bei der Herstellung von Zylinderköpfen. Dies ist ein wesentlicher Arbeitsschritt im Aufgabenfeld von Industriemechaniker*innen. Der Informationstext der Aufgabe führt zunächst allgemein in den Kontext und den Ausbildungsberuf Industriemechaniker*in ein, ehe Informationen zum hergestellten Produkt folgen. Ein abgebildeter Zylinderkopf visualisiert das Endprodukt.

Der folgende Arbeitsauftrag (siehe Abb. 3) geht nun zunächst konkret auf die Kostenplanung bei der Herstellung der Zylinderköpfe ein und fragt nach den Materialkosten. Die Recherche von Stahlpreis und –dichte könnte zwar auch als ein Teil der Aufgabe von den Lernenden eingefordert werden, wir haben uns hier aber entschieden, diese für die Bearbeitung notwendigen Angaben anzufügen. Die mathematische Modellierung dieser Aufgabe kann sich an der Volumenformel für Zylinder orientieren, sie ist also mit schulischen Mitteln prinzipiell lösbar. Wichtig für die Authentizität der Aufgabe ist, dass die beruflichen Abläufe mitbedacht werden. Das Fräsen der Einkerbungsringe geschieht erst nach dem Gießen der Zylinderköpfe, sodass es bei der Berechnung des Stahls keine Rolle spielen sollte. Weiter sollte ein Kostenpuffer (z. B. 5 oder 10 %) in die Aufgabenlösung mit einfließen. Dies wird nicht explizit in der Aufgabenstellung genannt, bildet aber einen gängigen Umgang in der beruflichen Praxis (in fast jedem Feld) ab. Die zweite Aufgabe dient der Vertiefung, indem die Lernenden sich mit den betrieblichen Abläufen eines wirtschaftlich denkenden Unternehmens auseinandersetzen sollen.

Arbeitsaufträge

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Materialkosten für alle 4.000 Zylinderköpfe.*
*Hinweis: Die Dichte von legiertem Stahl beträgt 7,9 g/m^3 und Stahl kostet ca. 6.000 € pro Tonne.

Aufgabe 2:
Die Materialkosten sind nur eine Kostenposition für die Herstellung der Zylinderköpfe. Recherchieren Sie, welche weiteren Kosten es gibt.

Abb. 3: Auszug aus der Aufgabe „Modellierung eines Zylinderkopfes“ (siehe Seite 54), abgebildet sind hier nur zwei Arbeitsaufträge der umfassenderen Aufgabe

In der beispielhaften Aufgabenlösung sind entsprechende Hinweise auf die beruflichen Notwendigkeiten enthalten, es sind jedoch mehrere Lösungsansätze denkbar (vgl. Abb. 4). Die Wahl eines geeigneten Sicherheitszuschlags wie in Aufgabe 10 ist dafür nur ein kleines Beispiel. Die Lösungsskizzen sind daher für die Hand der Lernenden ohne weitere Begleitung nicht geeignet. Lehrkräften aber können sie Hinweise geben, wie die unterschiedlichen Lösungen einsortiert und bewertet werden können. Wenn für die Bearbeitung einer Aufgabe viele oder alle Teilkompetenzen des Modellierungskreislaufs notwendig sind, sollten diese Teilkompetenzen auch entsprechend bei der Bewertung einer Aufgabenlösung bedacht werden. Ein bloßer Abgleich etwaiger Lösungswerte ist also in den meisten Fällen nicht zielführend. Vielmehr sind neben dem mathematischen Arbeiten auch das Strukturieren, Mathematisieren, Interpretieren und Validieren vollwertige Anforderungen, die je nach Aufgabe verschieden stark relevant sein können. Aus diesem Grund sind die Lösungsskizzen auch nicht ohne Begleitung für die Hand der Lernenden gedacht. Beim Einsatz der Aufgaben sollte dies berücksichtigt werden, beispielsweise indem in Ich-Du-Wir-Phasen die eigenen Lösungswege, die mathematischen

Rechnungen oder die Interpretation der Berechnungsergebnisse mit Lernpartner*innen oder im Plenum zum Besprechungsgegenstand gemacht werden.

Durchmesser Zylinderkopf:	$d = 6\,\text{cm}$
Radius Zylinderkopf:	$r_1 = \frac{d}{2} = \frac{6\,\text{cm}}{2} = 3\,\text{cm}$
Radius abzügl. Manteldicke:	$r_2 = \frac{d - 2 \cdot 1\,\text{cm}}{2} = \frac{6 - 2\,\text{cm}}{2} = 2\,\text{cm}$
Höhe Zylinderkopf:	$h_1 = 5\,\text{cm}$
Höhe ohne Deckfläche:	$h_2 = 5\,\text{cm} - 1\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$
Volumen Zylinder (komplett massiv):	$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot 5\,\text{cm} = 47{,}12\,\text{cm}^3$
Volumen Zylinderkopf-Hohlraum:	$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot 4\,\text{cm} = 16{,}76\,\text{cm}^3$
Stahlvolumen pro Zylinderkopf:	$V = V_1 - V_2 = 47{,}12\,\text{cm}^3 - 16{,}76\,\text{cm}^3 = 30{,}36\,\text{cm}^3$

Die Einkerbungen werden erst nach dem Gießen gefräst, sodass sie für die Berechnung der Kosten keine Rolle spielen.

Gesamtgewicht:	$G = 4.000 \cdot 30{,}36\,\text{cm}^3 \cdot 7{,}9\,\frac{g}{\text{cm}^3} = 959.376\,\text{g} = 0{,}9594\,\text{t}$
Gesamtkosten (inkl. 10 % Puffer):	$K = 1{,}1 \cdot 0{,}9594\,\text{t} \cdot 6.000\,\frac{€}{\text{t}} = 6.332{,}04\,€$

Abb. 4: Lösungsansatz zum ersten Arbeitsauftrag aus der Aufgabe „Modellierung eines Zylinderkopfes“

An jede Aufgabenlösung schließt sich ein Kommentar (siehe Abb. 5) an. Hierin wir die Aufgabe zur leichteren Orientierung für die Lehrkraft zunächst tabellarisch beschrieben. Der Kontext fasst die Realsituation der Aufgabe in einem Satz zusammen. Der Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik[1] (Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein, 2014) orientiert sich sowohl an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen als auch an den Leitideen, die mit den Aufgaben primär angezielt werden. Dabei wird die allgemeine mathematische Kompetenz Mathematisch modellieren nicht zusätzlich erwähnt, da alle hier vorgestellten Aufgaben dies als Haupt-Bezug zu den Fachanforderungen aufweisen. Das Vorwissen verweist auf die mathematischen Inhalte, die für die Lösung der Aufgabe elementar sind. Ggf. lassen sich die Aufgaben auch ohne dieses Vorwissen modellieren, abhängig vom gewählten Lösungsansatz. Mögliche Schwierigkeiten, die bei der Bearbeitung der Aufgaben auftreten können, werden anschließend genannt. Diese sind entweder theoretisch angenom-

1 Da das Projekt PANaMa in Schleswig-Holstein verankert ist, wurden die schleswig-holsteinischen curricularen Vorgaben als Referenzgröße verwendet. Diese sind eng entlang der Bildungsstandards konzipiert, sodass eine Übertragung der Angaben im Kommentar auf andere Bundesländer geringe Hürden darstellen sollte.

men oder ergeben sich aus ersten Bearbeitungen durch Schüler*innen und sind insbesondere als Unterstützungsansatz für die Lehrkräfte gedacht. Im Angesprochenen Berufsfeld geht es um konkrete Ausbildungsberufe, die entweder direkt im Realkontext der Aufgabe vorkommen oder deren Lerninhalte bei der Bearbeitung der Aufgabe zentral sind. Da die wenigsten Lehrkräfte selbst Erfahrung im Bereich der Berufsausbildung gesammelt haben, soll die Schwelle, berufliche Inhalte in den Unterricht zu integrieren, niedrig gehalten werden. Eine schnelle Recherche ist so leicht möglich. Die angegebene Klassenstufe, ab der eine Aufgabe für den Unterrichtseinsatz empfohlen wird, ist nicht allzu streng zu sehen. Je nach Schulform und weiteren Faktoren (z. B. unterschiedliche Ausbildungsberufe in der Berufsschule, G8- bzw. G9-Struktur im Gymnasium, schulinterne Regelungen) kann dies auch variieren. Einige Aufgaben lassen sich auch schon eher als angegeben in den Unterricht implementieren, wenn beispielsweise ein anderer Modellierungsansatz als in der Lösung angegeben durchgeführt wird. Tendenziell ist aber eher eine frühere als eine spätere Klassenstufe angegeben. Innerhalb der drei Berufsfelder High-Tech-Materialien, Landwirtschaft & Ernährung und Erneuerbare Energien sind die Aufgaben nach den hier angegebenen Klassenstufen sortiert. Der Bezug zu anderen Fächern zeigt die häufige Vernetzbarkeit von Modellierungsaufgaben mit Inhalten anderer Fächern auf und hilft, Aufgaben für fächerübergreifende Projekte schneller zu identifizieren. Der zweite Aufgabenteil von Aufgabe 10 (siehe Abb. 3) ist dafür ein gutes Beispiel. Hier spielen wirtschaftliche Grundlagen (Kostenrechnung) aus einer breiteren Sicht (nicht notwendigerweise nur auf den Beruf Industriemechaniker*in bezogen) die zentrale Rolle.

Beschreibung:

1. Kontext: Kostenplanung bei der Herstellung von Zylinderköpfen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L2: Messen
3. Vorwissen: Volumen Zylinder, zusammengesetzte Volumen
4. Mögliche Schwierigkeiten: Einkerbungen in der Aufgabe bei der Kostenplanung mitdenken
5. Angesprochenes Berufsfeld: Industriemechaniker*in, Betriebswirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Abb. 5: Kommentar zur Aufgabe „Modellierung eines Zylinderkopfes“ (siehe Seite 56)

Einige Aufgaben verfügen darüber hinaus über einen Didaktischen Kommentar. Dieser thematisiert z. B. die unterschiedlichen Lösungsansätze und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Aufgabenlösung. Weiter finden sich hier Ergänzungen zur Aufgabenlösung aus der beruflichen Praxis und zusätzliche Hinweise zum Aufgabeneinsatz im Unterricht. Im Differenzierungsvermögen werden in der Regel Möglichkeiten dargestellt, um die Aufgaben bezüglich der Schwierigkeit anzupassen. Dies können z. B. Hinweise zur erleichterten Bearbeitung einzelner Aufgabenteile oder zusätzliche Aufgabenteile zur intensiveren Behandlung des Themas sein.[2] Hilfekarten dienen bei einigen Aufgaben als Zusatzmaterial, mit deren Hilfe eine solche Differenzierung ebenfalls erreicht werden kann. Die Hilfekarten benötigen keine weitere Erklärung beim Einsatz im Unterricht und können verteilt werden, wenn Schüler*innen ein typisches Problem bei der Bearbeitung einer Aufgabe haben.

Ein zusätzlich wichtiger Aspekt bei der Thematisierung beruflicher Kontexte im Mathematikunterricht ist der Umgang mit beruflicher Fachsprache. Die sprachlichen Herausforderungen durch Fachtermini und die Beschreibung komplexer beruflicher Sachverhalte sind mitunter höher als bei üblichen „Schulbuchaufgaben". Eine Komplexitätsreduktion ist aus Authentizitätsgründen an vielen Stellen nicht sinnvoll und manchmal auch gar nicht möglich. Solche sprachlichen Herausforderungen können aber auch als Orientierung gesehen werden, welche Anforderungen in den Ausbildungsberufen vorkommen. Eine Thematisierung möglicher sprachlicher Hürden kann im Unterricht sinnvoll sein und zusätzlich helfen, berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen aufzubauen. Dazu können beispielhaft konkrete Strategien zum Umgang mit Fachtermini erarbeitet werden, die als allgemeine Strategien für die Schüler*innen auch an anderer Stelle nützlich sein können (siehe auch Meyer & Prediger, 2012).

Der Mehrwert der hier vorgestellten Aufgaben gegenüber vielen anderen (Modellierungs-) Aufgaben besteht in ihrem Beitrag zur Berufsorientierung und –vorbereitung. Dieser Beitrag gelingt jedoch nur dann, wenn der berufliche Kontext erhalten bleibt. Das Potential wird dabei besonders umfangreich genutzt, wenn die angesprochenen Berufsfelder zusätzlich thematisiert werden. So kann beispielsweise die Aufgabe 10 Ausgangspunkt sein, um sich mit dem Ausbildungsberuf Industriemechaniker*in auseinanderzusetzen. Internetrecherchen führen schnell zu Berufsprofilen, z. B. auf den Seiten der Agentur für Arbeit, in denen Anforderungen, Aufgaben, Chancen und Gehälter vorgestellt werden. Auch finden sich viele Informationsvideos zu den einzelnen Ausbildungsberufen im Internet. Einzelne Aufgaben lassen sich auch in Form von Rollenspielen (wie etwa in einem Assessment Center im Rahmen eines Bewerbungsverfahrens) oder als produktorientierte Projektarbeit in den Unterricht integrieren. Durch eine solche umfangreiche Thematisierung kann im Mathematikunterricht ein allgemeiner Beitrag zur Berufsorientierung geleistet werden. Zudem können Fragen nach den mathematischen Inhalten der unterschiedlichen Ausbildungsberufe gestellt und diskutiert werden. Wo findet sich überall Mathematik im Beruf? Bei welchen Berufen hätte man gar nicht damit gerechnet? Wie unterscheiden sich die mathematischen Anforderungen der verschiedenen Berufe? Die Aufgaben und ihre Lösungen können auch Lehrkräfte darin unterstützten, für sie fremde Berufsfelder besser kennenzulernen.

Die Relevanz von Mathematik in fast jedem Beruf kann den Lernenden in der Auseinandersetzung mit den Aufgaben schnell klar werden. Für einzelne Berufe wird auch deutlich, dass durchaus weiterführende Mathematik benötigt wird. Der Erwerb berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen erfordert genau solche Lerngelegenheiten, für die fachmathematische Inhalte innerhalb eines beruflichen Kontexts angewendet werden müssen. Dabei kann es Lerngelegenheiten geben, deren mathematisches Niveau in der Sekundarstufe I anzu-

2 Diese Möglichkeiten sind durch ▲ für ein erhöhtes Anforderungsniveau und durch ▼ für ein niedrigeres Anforderungsniveau gekennzeichnet.

siedeln ist, die aber durch komplexe außermathematische Inhalte erst in der Sekundarstufe II thematisiert werden sollten. Möchte man diese mathematischen Inhalte also im Unterricht wie gefordert in einer Vielzahl von (beruflichen) Kontexten authentisch behandeln, um den Schüler*innen die berufliche Relevanz von Mathematikunterricht umfangreich erfahrbar machen zu können, so sollten sie auch in fortgeschrittenen Klassenstufen immer wieder vorkommen. Die hier vorgestellten Aufgaben mögen dabei helfen.

Literatur

- BIBB (2018) = Bundesinstitut für Berufsbildung (2018). *Datenreport zum Berufsbildungsbericht 2018.* Bonn: BMBF.

- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik lehren,* 128, 18–21.

- Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

- Heymann, H. W. (1997). Allgemeinbildung als Aufgabe der Schule und als Maßstab für Fachunterricht. *Pädagogik,* 49, 42–45.

- KMK (2003) = Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Bonn: KMK.

- KMK (2012) = Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Bonn: KMK.

- KMK (2017) = Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2017). *Empfehlung zur Beruflichen Orientierung an Schulen.* Bonn: KMK.

- Lindmeier, A. (2019). Perspektiven am Arbeitsmarkt mit Naturwissenschaften und Mathematik. Ein Projekt zur regional verankerten Berufsorientierung im Fachunterricht der allgemeinbildenden Schulen. In: M. Wilken & S. Herzog (Hrsg.), *Das PANaMa-Projekt: Bd. 1. Konzept und Umsetzung* (S. 8–37), Kiel: IPN.

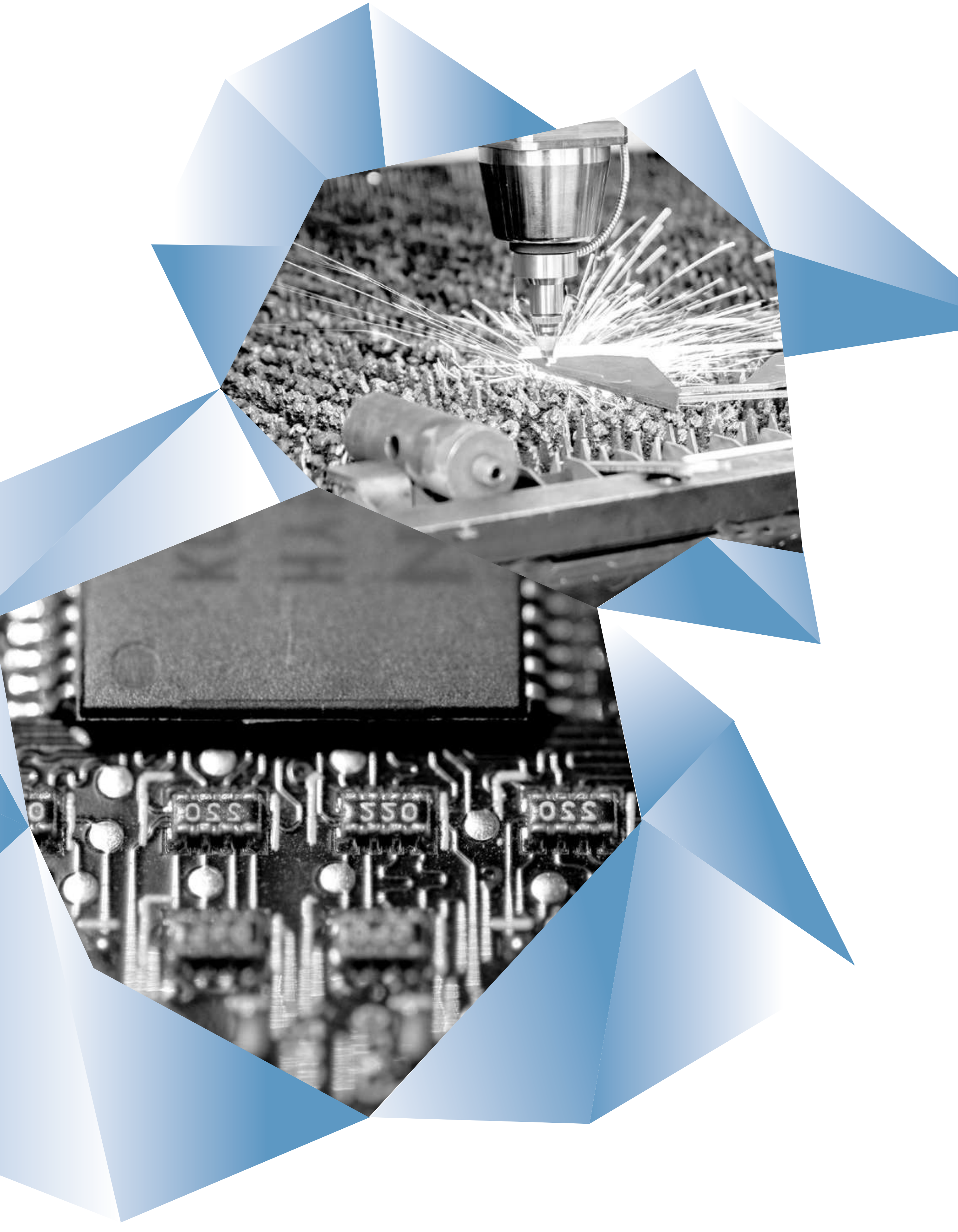
- Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 54(45), 2–9.

- Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein (2014). *Fachanforderungen Mathematik. Allgemein bildende Schulen. Sekundarstufe I. Sekundarstufe II.* Kiel: Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein.

- Neumann, K., Vollstedt, M., Lindmeier, A., Bernholt, S., Eckhardt, M., Harms, U. et al. (2013). Strukturmodelle allgemeiner Kompetenz in Mathematik und den Naturwissenschaften und Implikationen für die Kompetenzentwicklung im Rahmen der beruflichen Ausbildung in ausgewählten kaufmännischen und gewerblich-technischen Berufen. In R. Nickolaus, J. Retelsdorf, E. Winther, & O. Köller (Hrsg.), *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik Beihefte: Vol. 26. Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung.* Stand der Forschung und Desiderata (S. 113–137). Stuttgart: Steiner.

- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.v

II. High-Tech-Materialien



1. Schmutzabweisende Farbe

Familie Hansen aus Husum möchte die Außenwand ihres Einfamilienhauses mit schmutzabweisender Farbe streichen, weil die salzhaltige Luft an der Nordseeküste die Hauswände regelmäßig verschmutzt und beschädigt. Die Fassade des freistehenden Einfamilienhauses hat an Vorder- und Rückwand eine Breite von 11 m, 7 m breite Seitenwände und eine Höhe von 5,30 m bis zum geziegelten Schrägdach. An den Seitenwänden ist die Höhe bis zum Dach größer, diese zusätzliche Fläche entspricht aber etwa den Aussparungen für Türen und Fenster am gesamten Haus.

Herr Hansen war bereits in einem nahegelegenen Baumarkt, bei dem es Farbe zu einem Preis von 10,80 € pro Liter gibt (Reichweite pro Liter: 6 m^2). Bei der Farbe aus dem Baumarkt müssen noch auf jeden Liter 5 g schmutzabweisende Nanopartikel zugemischt werden. Im Baumarkt kostet eine 10-g-Packung mit schmutzabweisenden Nanopartikeln 19,90 €.

Herr Hansen hat vom Malereibetrieb Schmitt das folgende Angebot erhalten: „Für die Materialkosten der schmutzabweisenden Farbe berechnen wir Ihnen 14,00 € pro Liter, mit dem man 6 m^2 streichen kann. Die schmutzabweisende Farbe müsste für eine optimale Wirkung zweimal aufgetragen werden. Des Weiteren berechnen wir Ihnen 45,00 € pro Stunde für die Lohnkosten des Malermeisters. Unser Malermeister schafft es in einer Stunde ca. 25 m^2 Fläche zu streichen.“

Jetzt überlegt Herr Hansen, ob er das Haus selbst streichen soll. Er schätzt, dass er in einer Stunde 15 m^2 Fläche streichen kann. Er würde die Fassade nur einmal streichen.

1. Schmutzabweisende Farbe – Aufgaben

Aufgabe 1:

Versetzen Sie sich in die Lage von Herrn Hansen und vergleichen Sie das Angebot der Firma Schmitt mit der Möglichkeit, die Fassade selbst zu streichen.

Aufgabe 2:

Überlegen Sie sich zusätzliche Argumente, welche der Malereibetrieb hervorbringen könnte, damit Herr Hansen das Angebot der Firma dem eigenen Streichen gegenüber bevorzugt.

1. Schmutzabweisende Farbe – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Schritt 1 – Berechnung der zu streichenden Fläche

$(2 \cdot 11\,\mathrm{m} + 2 \cdot 7\,\mathrm{m}) \cdot 5{,}30\,\mathrm{m} = 191\,\mathrm{m}^2$

Schritt 2 – Berechnung Gesamtkosten Firma Schmitt

Benötigte Menge Farbe (zweimal streichen):	$\frac{191\,\mathrm{m}^2}{6\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{l}}} \cdot 2 = 63{,}6\,\mathrm{l}$
Preis für die Farbe:	$64\,\mathrm{l} \cdot 14{,}00\,€ = 896\,€$
Benötigte Stundenzahl (zweimal streichen):	$2 \cdot \frac{191\,\mathrm{m}^2}{25\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{h}}} = 15{,}28\,\mathrm{h}$
Lohnkosten (zwei Arbeitstage je 8 Stunden):	$16\,\mathrm{h} \cdot 45\,\frac{€}{\mathrm{h}} = 720\,€$
Gesamtkosten:	$896\,€ + 720\,€ = 1.616\,€$

Schritt 3 – Berechnung Gesamtkosten Selberstreichen

Benötigte Menge Farbe:	$\frac{191\,\mathrm{m}^2}{6\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{l}}} = 31{,}8\,\mathrm{l}$
Preis für die Farbe (ca. 10 % Puffer):	$35\,\mathrm{l} \cdot 10{,}80\,€ + \frac{35}{2} \cdot 19{,}90\,€ = 726{,}25\,€$
Benötigte Stundenzahl:	$\frac{191\,\mathrm{m}^2}{15\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{h}}} = 12{,}73\,\mathrm{h}$

Lösung Aufgabe 2:

Mögliche Bewertungskriterien:

- Vergleich Preis für Farbe
- Verhältnis Lohnkosten zu Materialkosten bei Firma Schmitt
- Gesamtpreisdifferenz
- Qualität von Arbeit durch Profis
- Doppelt aufgetragene Farbe verspricht zusätzlich bessere Qualität

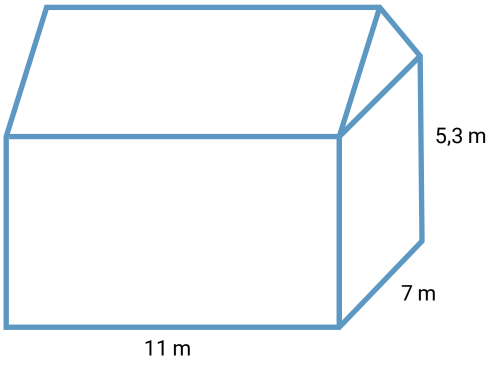
1. Schmutzabweisende Farbe – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Streichen einer Fassade von Privatperson und Malerbetrieb im Vergleich
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, L1: Zahl, L2: Messen
3. Vorwissen: Flächeninhalt Rechteck
4. Mögliche Schwierigkeiten: Argumente im letzten Aufgabenschritt finden
5. Angesprochenes Berufsfeld: Maler*in und Lackierer*in
6. Klassenstufe: Ab 7. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 1: Vorgabe einer Hausskizze:



Quellen:

https://nanopartikel.info/nanoinfo/querschnittsthemen/2089-nanopartikel-in-farben
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://malerbetriebborsch.wordpress.com/2013/04/04/was-kostet-eine-malerstunde/
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

2. Nanoversiegelung bei Fahrzeuglack

Es gibt eine Technik, die den Lack von Autos widerstandsfähiger gegen äußere Einflüsse, Verschmutzungen oder Niederschläge macht. Dabei wird eine Politur mit Nanopartikeln aufgetragen, die mikroskopisch kleine Unebenheiten im Lack auffüllt. Zusätzlich entsteht eine ca. 4 µm dicke Schutzschicht auf dem Lack, die eine sehr glatte Oberfläche besitzt.

Bei dieser sogenannten 2K-Versiegelung wird die Politur aus zwei Komponenten angemischt und innerhalb von wenigen Stunden auf den Lack aufgetragen. Wie viel Politur benötigt wird, ist von der Lackoberfläche des Fahrzeugs abhängig.

Die Auszubildende zur Malerin und Lackiererin Lea soll das oben abgebildete Fahrzeug mit einer 2K-Versiegelung versehen. Ihr Meister erklärt, dass man die benötigte Menge an Politur berechnen kann, indem man die Menge zuerst für 1 m^2 bestimmt und anschließend für die Fahrzeugoberfläche hochrechnet.

2. Nanoversiegelung bei Fahrzeuglack – Aufgaben

Aufgabe 1:

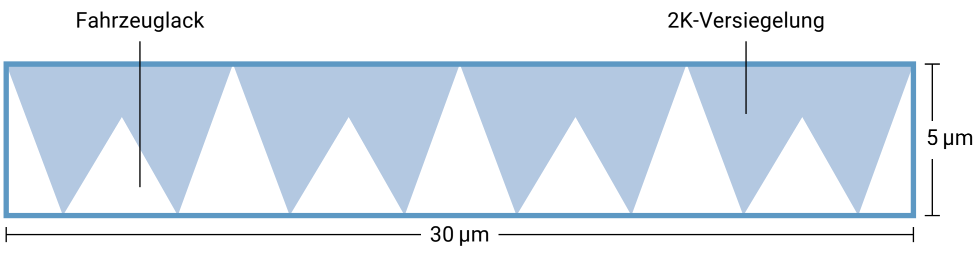
Die unten abgebildete Grafik zeigt einen stark vergrößerten Querschnitt der 2K-Versiegelung auf der unebenen Lackoberfläche des Fahrzeugs. Wie viel Politur wird für 1 m^2 der Fahrzeugoberfläche benötigt? Geben Sie das Ergebnis in ml an.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie anhand der Menge für 1 m^2 sowie einer Abschätzung der zu lackierenden Fläche des Fahrzeugs anhand der in der Abbildung angegebenen Maße, wie viel Politur die Auszubildende für das gesamte Fahrzeug benötigt.

Aufgabe 3:

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse und Ihre Herangehensweise mit denen Ihrer Mitschüler*innen. Fallen Ihnen Gemeinsamkeiten oder Unterschiede auf? Wie sind diese zustande gekommen?



2. Nanoversiegelung bei Fahrzeuglack – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Aus dem Querschnitt: Verhältnis (Lack:Versiegelung) ca. (1:2), d. h. bei 5 µm Dicke etwa $\frac{2}{3} \cdot 5\,\mu\text{m} \approx 3{,}4\,\mu\text{m}$ Versiegelung, zusätzlich 4 µm Schutzschicht.
Auf $1\,\text{m}^2$ berechnet braucht die Auszubildende Lea also für Versiegelung und Schutzschicht:
$(3{,}4\,\mu\text{m}+4\,\mu\text{m})\cdot 1\,\text{m}^2 = 7{,}4\,\mu\text{m}\cdot 1\,\text{m}^2 = 0{,}0074\,\text{mm}\cdot 1.000.000\,\text{mm}^2 = 7.400\,\text{mm}^3 = 7{,}4$ ml Politur.

Lösung Aufgabe 2:

Die Form des Wagens kann dem Foto nach in etwa als quaderförmig gesehen werden. Dabei scheint knapp $\frac{1}{3}$ der Höhe von den Fenstern eingenommen zu sein. Der Boden muss nicht poliert werden.
Zu streichende Flächen:

Dach :	$4{,}505\,\text{m} \cdot 1{,}72\,\text{m} = 7{,}75\,\text{m}^2$
Front- und Rückseite :	$2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}96\,\text{m} \cdot 1{,}72\,\text{m}\right) = 4{,}49\,\text{m}^2$
Zwei Seitenflächen :	$2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}96\,\text{m} \cdot 4{,}505\,\text{m}\right) = 11{,}77\,\text{m}^2$
Gesamtfläche :	$7{,}75\,\text{m}^2 + 4{,}49\,\text{m}^2 + 11{,}77\,\text{m}^2 = 24{,}01\,\text{m}^2$

Weiterhin werden 5 % Sicherheitszuschlag für die Politur angenommen.
Benötigte Menge Politur: $1{,}05 \cdot 24{,}01\,\text{m}^2 \cdot 7{,}4\,\frac{\text{ml}}{\text{m}^2} = 186{,}56\,\text{ml} \approx 187$ ml Nano-Lack

Lösung Aufgabe 3:

Die größten Unterschiede können an den Punkten, an denen geschätzt werden muss, auftreten:

- Querschnitt: Schätzungen ggf. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$
- Die zu lackierende Fläche
- Berücksichtigung eines „Sicherheitszuschlags“: in dieser Lösung 5 %; ggf. 10 %

2. Nanoversiegelung bei Fahrzeuglack – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Auszubildende zur Malerin und Lackiererin plant die benötigte Lack-Menge für die Versiegelung einer Fahrzeugoberfläche.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K6: Kommunizieren, L2: Messen
3. Vorwissen: Flächeninhalt ebener Figuren, Umrechnung von Einheiten
4. Mögliche Schwierigkeiten: Umrechnung von Einheiten, 2D-Querschnitt auf 3D-Schätzung anwenden
5. Angesprochenes Berufsfeld: Maler*in und Lackierer*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 1: $1\ \mu m = 0,001\ mm$; $1\ ml \cong 1.000\ mm^3$; Rechnen Sie vereinfacht mit 7 µm Schichtdicke für Versiegelung mit Schutzschicht.

▼ Zu Aufgabe 2: Skizze eines Quaders als „Fahrzeugskizze“ angeben

▲ Zu lackierende Fläche eines anderen Fahrzeugs eigener Wahl schätzen und begründen

Quellen:

https://www.nanotrends.eu/Nanoversiegelung-Autopflege/Autopflege-Nanoversiegelung-Lackpflege/Nanoversiegelung-2K-Autolack-NTPL.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Christopher Ernsting, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

3. Anfertigung von Bauteilen

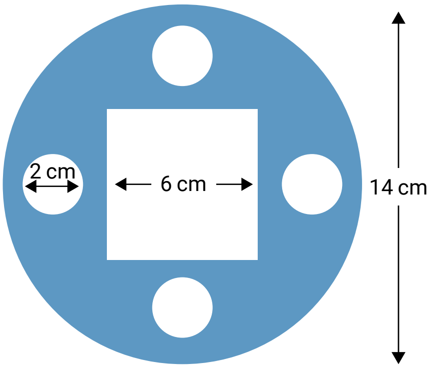


Abb. 1: Draufsicht eines Bauteils

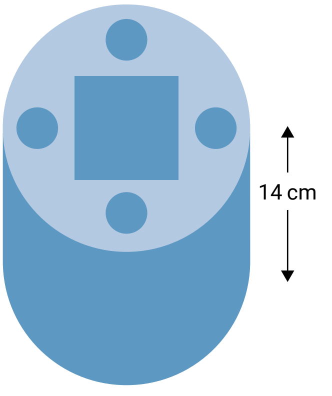


Abb. 2: Frontansicht eines Bauteils

Metallbauer*innen erhalten von Ingenieur*innen Baupläne für Bauteile, welche sie herstellen sollen. Solche Bauteile werden unter anderem für Brücken, Kräne, Schiffbauten und Aufzüge durch Drehen, Fräsen, Sägen, Schrauben und Schweißen hergestellt. Bauteile sollen zugleich möglichst stabil sein und ein möglichst geringes Gewicht aufweisen.

Die Metallbauerin in der Ausbildung Lina hat den Auftrag erhalten, das in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellte Bauteil für einen Schiffsmotor zu fertigen. Lina fragt sich, ob das Bauteil nicht auch anders gebaut werden kann. Die annähernd quadratische Aussparung in Abb. 2 ist notwendig für die spätere Verwendung des Bauteils. Die runden Aussparungen dienen lediglich dazu, das Bauteil leichter zu machen.

3. Anfertigung von Bauteilen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Unterstützen Sie Lina bei ihren Überlegungen, ob man das Bauteil durch weitere kreisförmige Aussparungen mit demselben Durchmesser (2 cm) leichter bauen kann. Fertigen Sie dazu eine neue Konstruktionsanleitung wie in Abb. 1 an. Beachten Sie bei Ihren Überlegungen, dass die Dicke des Metalls nie 0,7 cm unterschreiten darf, da das Bauteil ansonsten zu instabil wird.

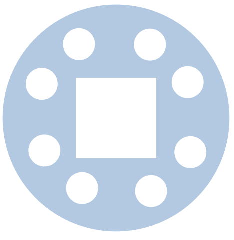
Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Gewicht Ihres in Aufgabe 1 konstruierten Bauteils und vergleichen Sie das Gewicht mit dem ursprünglichen Bauteil. Der verwendete Stahl wiegt 7,85 g/cm^3.

3. Anfertigung von Bauteilen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der folgende Lösungsweg liefert eine Annäherung an das Problem durch systematisches Ausprobieren:



- Aufsicht des Bauteils in Originalgröße zeichnen.
- Quadratische Aussparung einzeichnen.
- Zirkel auf einen Radius von 1 cm einstellen.
- Ausprobieren, welche Anordnungen der runden Aussparungen möglich sind.
- Dabei kann ein Ergebnis wie in der Abbildung entstehen.

Lösung Aufgabe 2:

Volumen des gesamten Zylinders:	$V_Z = A \cdot h = \pi \cdot (7\,\text{cm})^2 \cdot 23\,\text{cm} \approx 3.540{,}47\,\text{cm}^3$
Volumen der quadratischen Aussparung:	$V_q = a \cdot b \cdot c = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 23\,\text{cm} = 828\,\text{cm}^3$
Volumen einer runden Aussparung:	$V_r = A \cdot h = \pi \cdot 1\,\text{cm} \cdot 23\,\text{cm} \approx 72{,}26\,\text{cm}^3$
Gewicht des ursprünglichen Bauteils:	$(V_Z - V_q - 4 \cdot V_r) \cdot 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 19.024\,\text{g} = 19{,}02\,\text{kg}$
Gewicht des Bauteils aus Aufgabe 1:	$(V_Z - V_q - 8 \cdot V_r) \cdot 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 16.755\,\text{g} = 16{,}76\,\text{kg}$

3. Anfertigung von Bauteilen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Metallbauerin in der Ausbildung optimiert das Gewicht eines vorgegebenen Bauteils.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Volumenberechnung Quader und Zylinder
4. Mögliche Schwierigkeiten: Ausprobieren als endgültige Lösung anerkennen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Metallbauer*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Zu Aufgabe 1: Es kann auch gezeigt werden, dass maximal 8 runde Aussparungen mit Durchmesser 2 cm möglich sind.

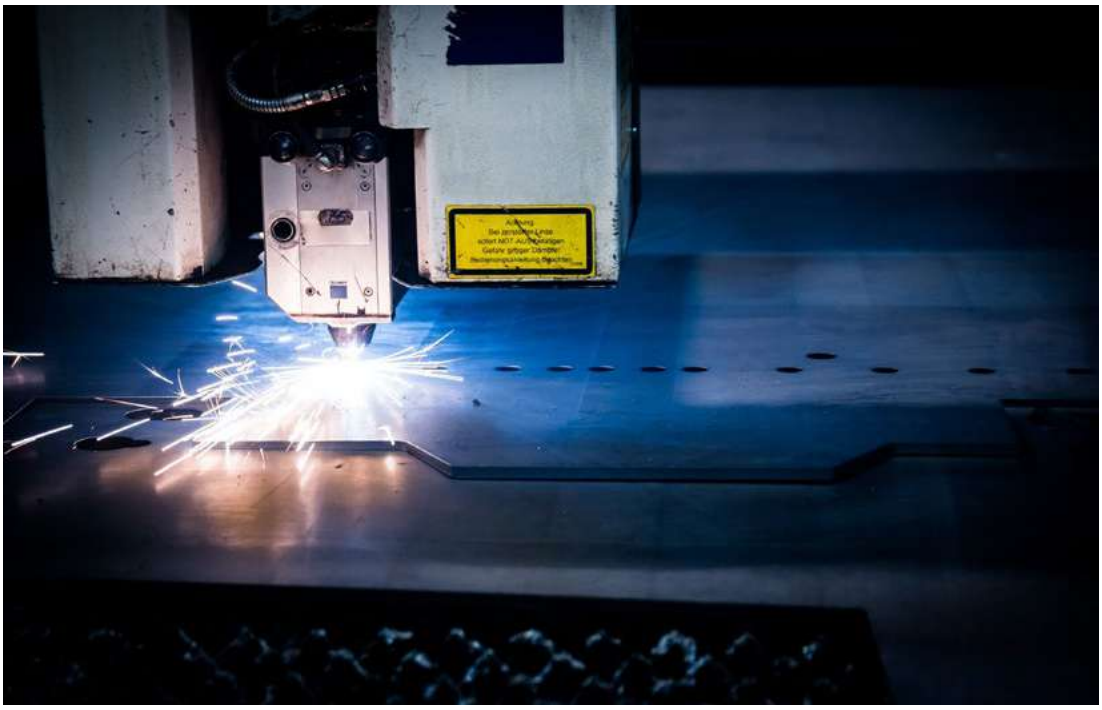
▲ Zu Aufgabe 2: Gewichtsreduzierung prozentual angeben.

Quellen:

https://www.ws-stahl.de/service/gewichtstabellen/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.dvs-ev.de/bvrostock/downloads/kostenvergleich.pdf [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Kai Bertallot, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

4. Thermisches Schneiden



Konstruktionsmechaniker*innen sind auf die Verarbeitung von Metall, Stahl und Aluminium spezialisiert. Sie fertigen z. B. Metallbaukonstruktionen, Industriemaschinen oder Schiffsbauteile an. Durch das sogenannte „thermische Schneiden" können dafür einzelne Werkstücke maßgenau zugeschnitten werden. Dieses Verfahren kann mit Lasern durchgeführt werden.

Das ausgestrahlte Licht dieser Laser (umgangssprachlich: „Laserstrahl") besitzt eine Wellenlänge von ca. 1.000 nm und wird zum Schneiden gebündelt auf das Material gerichtet. Mit Hilfe von Computerprogrammen kann dem Laser dabei mitgeteilt werden, wie ein Werkstück zugeschnitten werden soll.

Für den Bau eines Segelschiffs soll Nicklas, Auszubildender zum Konstruktionsmechaniker, sogenannte Spanten (eine Art Träger) aus Aluminium für den Rumpf des Schiffes zuschneiden. Dafür plant Nicklas ein parabelförmiges Werkstück (Abb. 1).

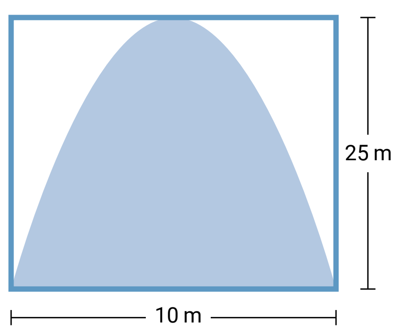


Abb. 1: Skizze des Werkstücks

4. Thermisches Schneiden – Aufgaben

Aufgabe 1:

Das Computerprogramm, das das Laserschneidegerät steuert, arbeitet mit mathematischen Funktionen. Dazu muss die exakte äußere Form des Werkstücks als Funktion beschrieben werden. Helfen Sie Nicklas anhand der Skizze eine entsprechende Funktionsgleichung aufzustellen, die er dann am Computer verwenden kann.

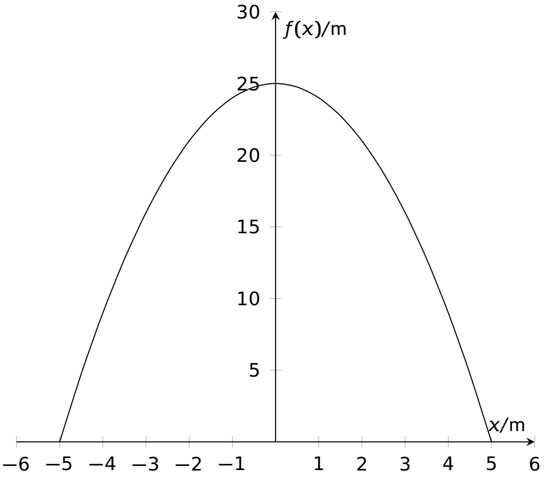
4. Thermisches Schneiden – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Als Ansatz wird die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion f gewählt:

$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$$

Dabei ist a der Streckfaktor und d und e sind x- bzw. y-Wert des Scheitelpunktes der Parabel. Legt man den Funktionsgraphen mittig in ein Koordinatensystem, so ergibt sich die folgende Skizze:



Mit dem Scheitelpunkt $S(0|25)$ folgt dann: $f(x) = a \cdot x^2 + 25.$

Durch Einsetzen des Punktes (5|0), der auf dem Graphen von f liegt, in die Gleichung folgt:

$$0 = f(5) = a \cdot 5^2 + 25 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-25}{25} = -1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x^2 + 25.$$

4. Thermisches Schneiden – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Auszubildener zum Konstruktionsmechaniker plant die Fertigung von Spanten für eine Schiffsbaufirma.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L2: Messen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Parabel in der Scheitelpunktsform
4. Mögliche Schwierigkeiten: keine
5. Angesprochenes Berufsfeld: Konstruktionsmechaniker*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Physik

Differenzierungsmöglichkeiten:

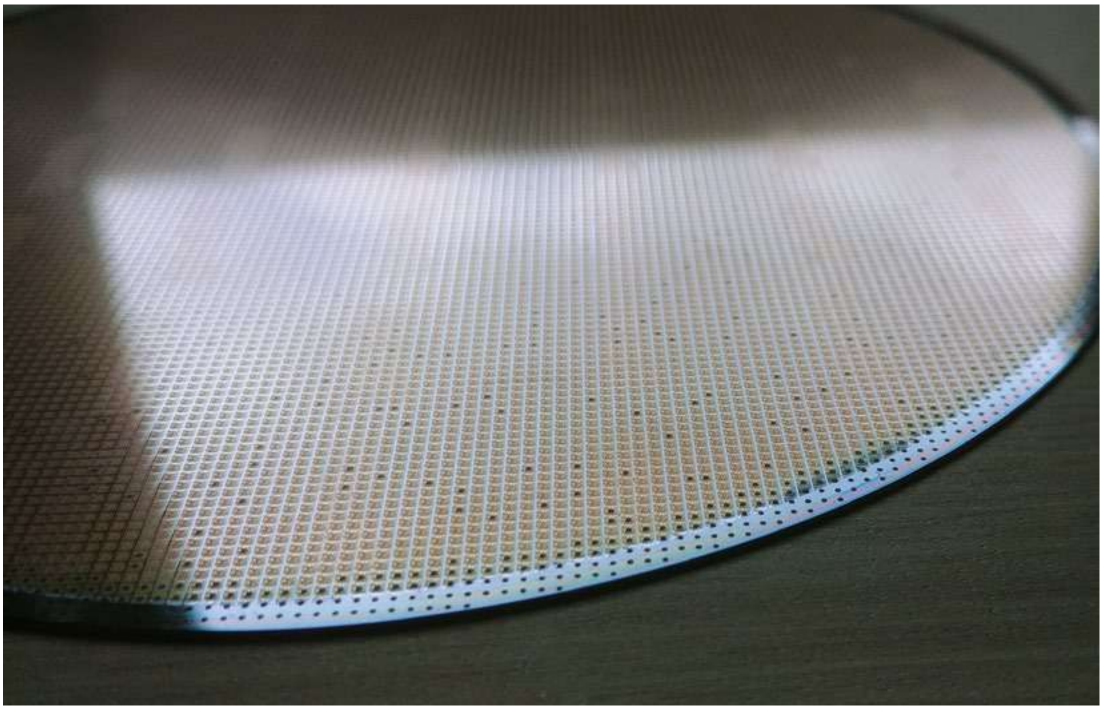
▲ Zusätzliche Aufgabenstellung: Der Schiffsrumpf läuft an Bug und Heck enger zusammen. Ermitteln Sie mögliche Funktionen, mit denen die Aluminium-Spanten, die dicht an Bug und Heck liegen, beschrieben werden können.

Quellen:

Heße, S. (1998). *Industrieroboterpraxis. Automatisierte Handhabung in der Fertigung*. Braunschweig: Vieweg.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Christopher Ernsting, Robert von Hering,
Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

5. Herstellung von Mikrochips



Mikrochips sind elektronische Bauteile. Sie werden in elektronischen Geräten verwendet, z. B. als Bestandteile von Computerprozessoren oder als Datenspeicher in Handys. Für die Herstellung werden sehr dünne Scheiben aus Silizium (eine Art Metall) verwendet. Diese heißen Wafer (siehe Abbildung) und sind herstellungsbedingt rund.

Die eigentlichen Mikrochips werden auf die Oberfläche eines Wafers geätzt. Abschließend werden die fertigen Mikrochips ausgeschnitten und weiterverarbeitet. Bei einem Hersteller wird mit folgenden Maßen gearbeitet: Ein Wafer hat einen Durchmesser von $d = 300\,\text{mm}$. Die Maße des Mikrochips sind:

Länge: $a = 11{,}50\,\text{mm}$
Breite: $b = 7{,}00\,\text{mm}$

5. Herstellung von Mikrochips – Aufgaben

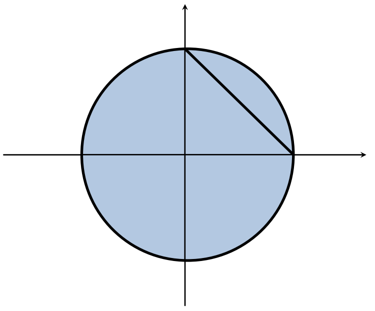
Aufgabe 1:
Skizzieren Sie eine Möglichkeit, wie die Mikrochips auf dem runden Wafer angeordnet werden können. Wie viele Mikrochips können je Wafer hergestellt werden?

Aufgabe 2:
Wie viel Verschnitt entsteht beim Zurechtschneiden der Mikrochips bei dieser Anordnung?

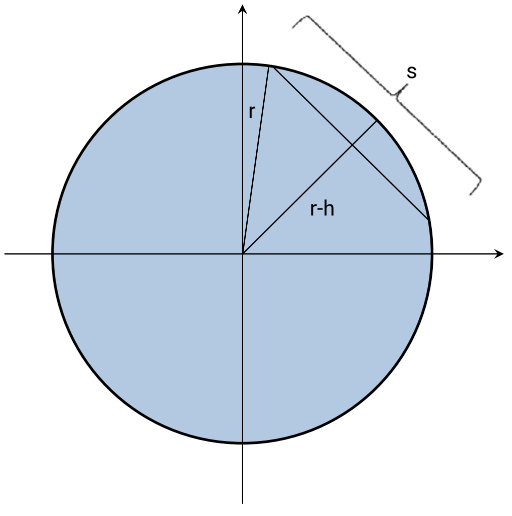
Aufgabe 3:
Gibt es eine günstigere Anordnung der Mikrochips? Begründen Sie.

Hilfekarten:

Wenn Sie den Wafermittelpunkt in den Ursprung eines Koordinatensystems legen, lässt sich gut erkennen, welche Punkte auf dem Rand des Wafers sich als Eckpunkte des maximalen Quadrats eignen.

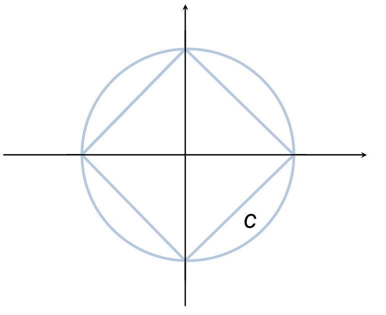


Die Länge einer Kreissehne lässt sich gut über die folgende Skizze herausfinden:



5. Herstellung von Mikrochips – Lösung

Lösung Aufgabe 1:



Legt man den Mittelpunkt des Wafers in den Ursprung eines Koordinatensystems, so bieten sich die Schnittpunkte des Außenrandes mit den Koordinatenachsen als Ecken des gesuchten Quadrates an.
Zwischen den Achsen liegt dann jeweils ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Radius des Kreises als Katheten und der Seitenlänge c des Quadrates als Hypotenuse.
$c^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$ (Satz des Pythagoras)
$\Rightarrow c = 212{,}13\,\text{mm}$

Mögliche Anzahl Chips:

$\frac{c}{a} = \frac{212{,}13\,\text{mm}}{11{,}5\,\text{mm}} = 18{,}45$
$\frac{c}{b} = \frac{212{,}13\,\text{mm}}{7\,\text{mm}} = 30{,}3$

Also können $18 \cdot 30 = 540$ Chips angeordnet werden.

Lösung Aufgabe 2:

Fläche des Wafers :	$A_W = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 150\,\text{mm}^2 = 70.685{,}83\,\text{mm}^2$
Fläche des Rechtecks :	$A_R \approx (18 \cdot 11{,}5\,\text{mm}) \cdot (30 \cdot 7\,\text{mm}) = 207\,\text{mm} \cdot 210\,\text{mm}$
	$= 43.470\,\text{mm}^2$
Verschnitt :	$A_V = A_W - A_R = 70.685{,}83\,\text{mm}^2 - 43.470\,\text{mm}^2 = 27.215{,}83\,\text{mm}^2$
Prozentualer Verschnitt :	$\frac{27.215{,}83\,\text{mm}^2}{70.685{,}83\,\text{mm}^2} = 38{,}5\,\%$

Lösung Aufgabe 3:

In der Skizze zu Aufgabe 1 lassen sich vier Kreissegmente erkennen, die dort als Verschnitt zählten. Hier lassen sich weitere Mikrochips gewinnen. Das folgende Vorgehen bietet sich an:

- Für jede neue Reihe Mikrochips die Kreissehnenlänge neu über den Satz des Pythagoras berechnen: $s = 2 \cdot \sqrt{r^2 - (r-h)^2}$ (siehe Skizze).
- Anzahl Mikrochips pro Reihe bestimmen.
- Auf diese Weise können bis zu 808 Mikrochips angeordnet werden.
- Der Verschnitt reduziert sich damit auf knapp 8 %.

5. Herstellung von Mikrochips – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Mikrochips sollen möglichst effizient aus einem Wafer geschnitten werden.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K4: Mathematische Darstellungen verwenden, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L2: Messen
3. Vorwissen: Berechnungen am Kreis (Kreissehne), Satz des Pythagoras, Flächenberechnung ebener Figuren (Kreis, Quadrat, Rechteck), Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: Anordnungsskizze erstellen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Mikrotechnolog*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Informatik, Chemie

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 1 bzw. Aufgabe 3: Nutzung der Hilfekarten

Didaktischer Kommentar:

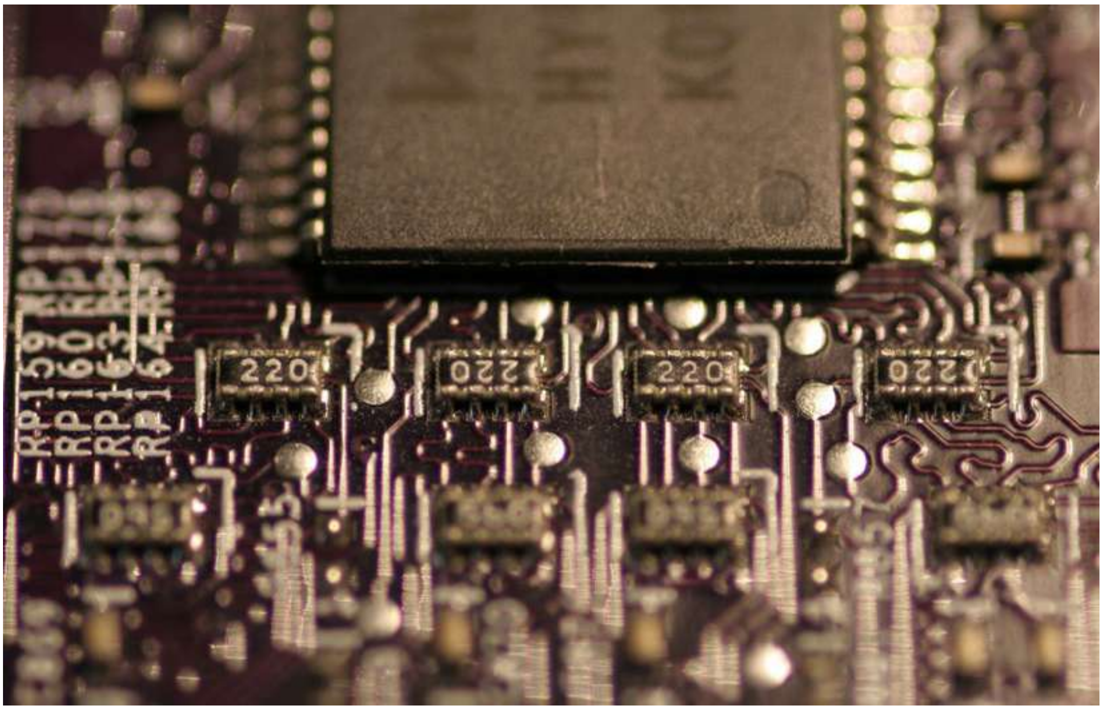
In Aufgabe 3 sind auch andere Lösungsansätze möglich, z. B. kreisförmige Anordnung oder eine Anordnung in Reihen mit optimiertem Versatz. Für Erprobung und Vergleich verschiedener Ansätze bietet sich auch die Nutzung von Excel an.

Quellen:

https://de.wikibooks.org/wiki/Siliciumverarbeitung:_Herstellung_von_Microchips [letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.netzmafia.de/skripten/hardware/SMD/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.halbleiter.org/waferherstellung/wafer/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Christopher Ernsting, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

6. Vermutung von Gordon Moore



Transistoren sind sehr kleine Bauelemente, die für die Steuerung von elektrischen Spannungen und Strömen in Mikrochips verwendet werden. Die ersten Mikrochips bestanden im Jahr 1971 aus bis zu 2.300 Transistoren mit einer Fläche von ungefähr 10 μm^2. Heutzutage liegt diese Fläche im Nanobereich und Mikrochips können mehrere Milliarden Transistoren enthalten. Gordon Moore, US-amerikanischer Unternehmer und Mitbegründer des Mikrochip-Herstellers Intel, vermutete im Jahr 1975, dass sich die Anzahl an Transistoren in einem Mikrochip alle 2 Jahre verdoppeln würde, da die Transistoren im Laufe der Zeit immer kleiner wurden. Diese Vermutung wird seither als „Moore'sches Gesetz" bezeichnet.

Jahr	Anzahl Transistoren	Jahr	Anzahl Transistoren
1971	2 300	1997	10 000 000
1972	4 500	1999	35 000 000
1974	6 000	2000	65 000 000
1976	9 000	2003	400 000 000
1978	53 000	2006	450 000 000
1979	80 000	2007	900 000 000
1985	540 000	2008	910 000 000
1989	1 900 000	2009	1 000 000 000
1993	5 000 000	2010	2 300 000 000
1996	6 400 000	2011	2 600 000 000

Anzahl der Transistoren in einem Mikrochip

6. Vermutung von Gordon Moore – Aufgaben

Trifft die Vermutung von Gordon Moore zu? Gehen Sie dafür wie folgt vor:

Aufgabe 1:

Stellen Sie für die Vermutung von Gordon Moore eine Funktionsgleichung auf, die auf dem Wert für die Anzahl der Transistoren in einem Mikrochip des Jahres 1971 basiert.

Aufgabe 2:

Stellen Sie die Funktionswerte aus Aufgabe 1 und die tatsächlichen Werte aus der Tabelle mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms in einer gemeinsamen Tabelle dar und vergleichen Sie beide miteinander. Trifft die Vermutung von Moore bis 2011 tatsächlich zu?

Aufgabe 3:

Informieren Sie sich zusätzlich über aktuelle Entwicklungen der Transistoranzahlen in einem Mikrochip. Wann könnte das Gesetz an seine Grenzen stoßen?

6. Vermutung von Gordon Moore – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Gordon Moore vermutete einen exponentiellen Zusammenhang der folgenden Form:
Jahr → Anzahl der Transistoren.

Allgemeine Form:	$A(t) = A_0 \cdot a^t$
Startwert A_0 im Jahr 1971:	2.300 Transistoren
Wachstumsfaktor a:	2 jedes 2. Jahr (Verdopplung)
$A(t) = A_0 \cdot a^t =$	$2.300 \cdot 2^{\frac{t-1.971}{2}}$

Lösung Aufgabe 2:

Jahr	A(t)	Tatsächliche Anzahl	Abweichung	% Abweichung
1971	2.300,00	2.300	0,00	0,00
1972	3.252,69	4.500	1.247,31	38,35
1974	6.505,38	6.000	-505,38	-7,77
1976	13.010,76	9.000	-4.010,76	-30,83
1978	26.021,53	53.000	26.978,47	103,68
1979	36.800,00	80.000	43.200,00	117,39
1985	294.400,00	540.000	245.600,00	83,42
1989	1.177.600,00	1.900.000	722.400,00	61,35
1993	4.710.400,00	5.000.000	289.600,00	6,15
1996	13.323.023,13	6.400.000	-6.923.023,13	-51,96
1997	18.841.600,00	10.000.000	-8.841.600,00	-46,93
1999	37.983.200,00	35.000.000	-2.683.200,00	-7,12
2000	53.292.092,51	65.000.000	11.707.907,49	21,97
2003	150.732.800,00	400.000.000	249.267.200,00	165,37
2006	426.336.740,11	450.000.000	23.663.259,89	5,55
2007	602.931.200,00	900.000.000	297.068.800,00	49,27
2008	852.673.480,22	910.000.000	57.326.519,78	6,72
2009	1.205.862.400,00	1.000.000.000	-205.862.400,00	-17,07
2010	1.705.346.960,44	2.300.000.000	594.653.039,56	34,87
2011	2.411.724.800,00	2.600.000.000	188.275.200,00	7,81

Mögliche Bewertungskriterien:
- Absolute/Relative Abweichung zwischen Modellfunktion und tatsächlicher Entwicklung

Lösung Aufgabe 3:

Seit 2016 wird bezweifelt, ob die Entwicklung immer kleinerer Bauteile weiter gelingen kann. Die Hersteller stoßen auf physikalische Grenzen und arbeiten bereits an alternativen Technologien.

6. Vermutung von Gordon Moore – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Steigende Anzahl an Transistoren in einem Mikrochip
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, K4: Mathematische Darstellungen verwenden, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentielle Funktionen, Bedienung eines Tabellenkalkulationsprogramms
4. Mögliche Schwierigkeiten: Bedienung eines Tabellenkalkulationsprogramms
5. Angesprochenes Berufsfeld: Fachinformatiker*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Informatik

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 1: Vorgabe der allgemeinen Funktionsgleichung
▲ Zu Aufgabe 1: Händische Bearbeitung statt Tabellenkalkulation

Quellen:

https://www.welt.de/wirtschaft/webwelt/article152297214/Das-fundamentale-Computer-Gesetz-gilt-nicht-mehr.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Christopher Ernsting, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

7. Produktion von Bauteilen

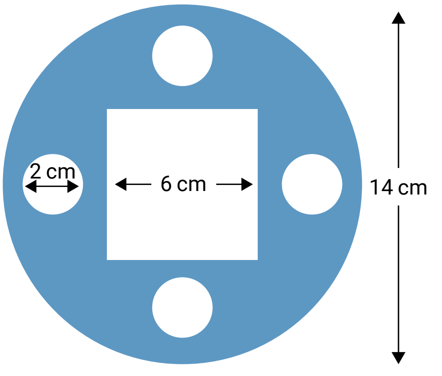


Abb. 1: Draufsicht eines Bauteils

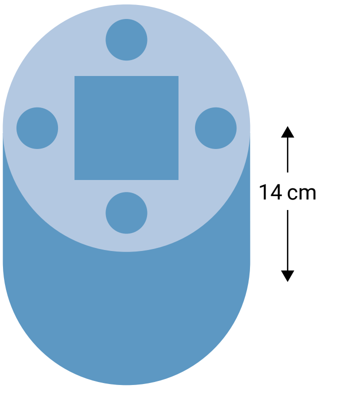


Abb. 2: Frontansicht eines Bauteils

Metallbauer*innen stellen für Unternehmen Bauteile her, die im Schiffbau, beim Brückenbau oder in Fahrstühlen verwendet werden. Sie erhalten Aufträge und müssen dafür den Materialeinsatz berechnen. Dabei soll möglichst wenig Materialverschnitt entstehen.

Der Auszubildende zum Metallbauer Max soll für seinen Auftraggeber von dem oben abgebildeten Bauteil 50 Stück herstellen. Die 50 Bauteile werden aus einem einzigen großen Block Stahl hergestellt. Dieser große Block Stahl wird in Quaderform geliefert.

7. Produktion von Bauteilen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Max überlegt, welche Maße der große Block Stahl am besten haben sollte. Überlegen Sie sich mögliche Zuschnittpläne. Welche Vor- und Nachteile haben die verschiedenen Pläne?

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie sich für einen Zuschnittplan. Bestimmen Sie (z. B. mit einer maßstabsgetreuen Zeichnung) die Maße für den großen Stahlblock. Geben Sie das Volumen Ihres Stahlblocks an.

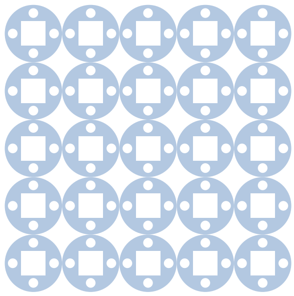
Aufgabe 3:

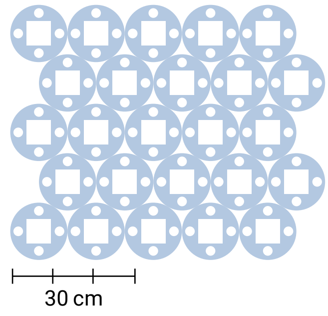
Vergleichen Sie Ihren Zuschnittplan und das Volumen des Stahlblocks mit dem Ergebnis Ihres Nachbarn. Vergleichen Sie Ihre Lösungen und diskutieren Sie, welcher Zuschnittplan am sinnvollsten für die Produktion ist.

7. Produktion von Bauteilen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

In der Draufsicht gibt es mehrere Möglichkeiten, die Bauteile anzuordnen. Variante 1 ist, die zylindrischen Bauteile einfach nebeneinander anzuordnen (linkes Bild). Das rechte Bild (Variante 2) lässt offenbar weniger Verschnitt zu.





Lösung Aufgabe 2:

Variante 1:

- Siehe linke Seite der Skizze zu Aufgabe 1
- 2 Lagen übereinander à 5 Bauteile pro Zeile (à 14 cm) und 5 Bauteile pro Reihe (à 14 cm)
- Volumen von $V_1 = 2 \cdot 5 \cdot 14\,\text{cm} \cdot 5 \cdot 14\,\text{cm} \cdot 23\,\text{cm} = 225.400\,\text{cm}^3$ Stahl

Variante 2:

- Siehe rechte Seite der Skizze zu Aufgabe 1
- 2 Lagen übereinander à 5 Bauteile pro Zeile und 5 Bauteile pro Reihe
- Gesamtbreite des Blocks entspricht 5,5 Bauteilen: $5{,}5 \cdot 14\,\text{cm} = 77\,\text{cm}$
- Abschätzung der Gesamthöhe mit Hilfe des Maßstabs: 63 cm (Im didaktischen Kommentar ist eine Möglichkeit der Berechnung angegeben.)
- Volumen von $V_2 = 2 \cdot 77\,\text{cm} \cdot 63\,\text{cm} \cdot 23\,\text{cm} = 223.146\,\text{cm}^3$ Stahl

Lösung Aufgabe 3:

Bewertungskriterien:

- Adäquates Vorstellen der Lösungen und Lösungswege
- Argumente für den eigenen Zuschnittplan finden (Überschuss, Maße des Stahlblocks etc.)

Die hier aufgeführten Lösungen haben im Vergleich zum tatsächlich verwendeten Stahl $(50 \cdot \pi \cdot (7\,\text{cm})^2 \cdot 23\,\text{cm} = 177.028{,}5\,\text{cm}^3)$ einen prozentualen Verschnitt von

$$1 - \frac{177.028{,}5\,\text{cm}^3}{225.400\,\text{cm}^3} = 0{,}2146 = 21{,}46\,\% \text{ für Variante 1 und}$$
$$1 - \frac{177.028{,}5\,\text{cm}^3}{223.146\,\text{cm}^3} = 0{,}2067 = 10{,}67\,\% \text{ für Variante 2.}$$

7. Produktion von Bauteilen – Kommentar

Beschreibung:

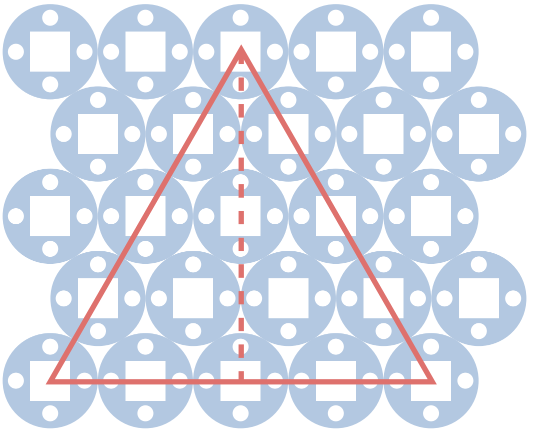
1. Kontext: Ein Auszubildender zum Metallbauern erstellt einen Zuschnittplan für die Herstellung von Bauteilen mit möglichst geringem Verschnitt.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Volumenberechnung Quader und Zylinder
4. Mögliche Schwierigkeiten: Schüler*innen wollen alle 50 Bauteile skizzieren und haben keine Vorstellung/Idee Kreise anders anzuordnen, als nur nebeneinander.
5. Angesprochenes Berufsfeld: Metallbauer*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 1: Veranschaulichen Sie sich das Problem mit mehreren gleichgroßen Münzen.
▼ Zu Aufgabe 2: Berechnen Sie zunächst die Maße des Stahlblocks.
▲ Zu Aufgabe 3: Berücksichtigen Sie den jeweiligen Verschnitt in Prozent.

Didaktischer Kommentar:

Die platzsparende zweite Variante aus der Lösung muss nicht ausgemessen, sondern kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras auch berechnet werden:



Dann hat die Anordnung eine Höhe von 62,5 cm.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Kai Bertallot, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

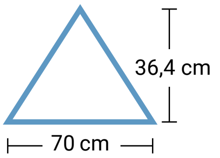
8. Schweißen bei der Müllverbrennungsanlage Kiel

Ahmed Taromi macht eine Ausbildung zum Industriemechaniker bei der Müllverbrennungsanlage Kiel. Zu seinen Aufgaben gehört es unter anderem, Reparaturen an der Müllverbrennungsanlage durchzuführen. Während der Sommerrevision wird festgestellt, welche Bauteile defekt sind und ausgetauscht werden müssen. Als angehender Industriemechaniker ist Ahmed für diese Reparaturarbeiten zuständig.

8. Schweißen bei der Müllverbrennungsanlage Kiel – Aufgaben

Aufgabe 1:

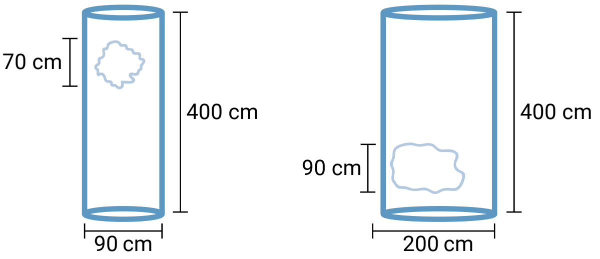
Ein Gehäuseteil der Abgasreinigung ist defekt. Für die Reparatur reicht es aus, wenn ein Teil der angegebenen Abmessungen aus einem Edelstahlblech gefräst und anschließend darauf geschweißt wird (s. Abbildung). Um den Materialwert des Ersatzteils zu bestimmen, muss die Größe bestimmt werden. Berechnen Sie die Fläche des Ersatzteils.



Aufgabe 2:

Es wurden noch zwei weitere Defekte an anderen Bauteilen festgestellt:

Ahmed soll auch Ersatzteile für diese Defekte fräsen und anschließend auf die Bauteile schweißen. Bestimmen Sie mögliche Formen für die Ersatzteile. Geben Sie die Maße an, sodass die Teile gefräst werden können. Berücksichtigen Sie dabei mindestens 2 cm Überlappung. Welche Fläche haben die jeweiligen Ersatzteile?



8. Schweißen bei der Müllverbrennungsanlage Kiel – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Das Ersatzteil hat eine Fläche von $A = \frac{G \cdot h}{2} = \frac{70\,\text{cm} \cdot 36{,}4\,\text{cm}}{2} = 1.274\,\text{cm}^2$.

Lösung Aufgabe 2:

Zusätzlicher Rand für das Schweißen: 2 cm

Linkes Ersatzteil:

Viereck mit Diagonallänge 70 cm

$$A \overset{\substack{Diagonalformel \\ o.Pythagoras}}{=} \frac{(d+4)^2}{2} = \frac{(74\,\text{cm})^2}{2} = 2.738\,\text{cm}^2$$

Rechtes Ersatzteil:

1. Möglichkeit: Kreis mit Durchmesser d= 150 cm

$$A = \pi \cdot \frac{d}{2}^2 = \pi \cdot \left(\frac{154\,\text{cm}}{2}\right)^2 = 18.627\,\text{cm}^2 \approx 1{,}86\,\text{m}^2$$

2. Möglichkeit: Rechteck mit Kantenlängen 90 cm und 150 cm

$$A = 92\,\text{cm} \cdot 152\,\text{cm} = 13.984\,\text{cm}^2 \approx 1{,}4\,\text{m}^2$$

Ahmed sollte sich auf den ersten Blick für ein rechteckiges Ersatzteil entscheiden. Durch andere Schätzungen der Maße könnte er jedoch zu einem anderen Ergebnis kommen. Nach Möglichkeit sollte er die defekte Stelle noch einmal genauer ausmessen.

8. Schweißen bei der Müllverbrennungsanlage Kiel – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Industriemechaniker in der Ausbildung plant das Fräsen und Schweißen von Ersatzteilen aus Edelstahl.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L1: Zahl, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Flächeninhalte ebener Figuren (Dreieck, Viereck, Kreis)
4. Mögliche Schwierigkeiten: Schüler*innen geben sich in Aufgabe 2 mit der erstbesten Lösung zufrieden.
5. Angesprochenes Berufsfeld: Industriemechaniker*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Zusätzlich können Materialwerte berechnet werden. Dazu müssten zunächst die Kosten für unterschiedliche Edelstahlbleche recherchiert werden.

Didaktischer Kommentar:

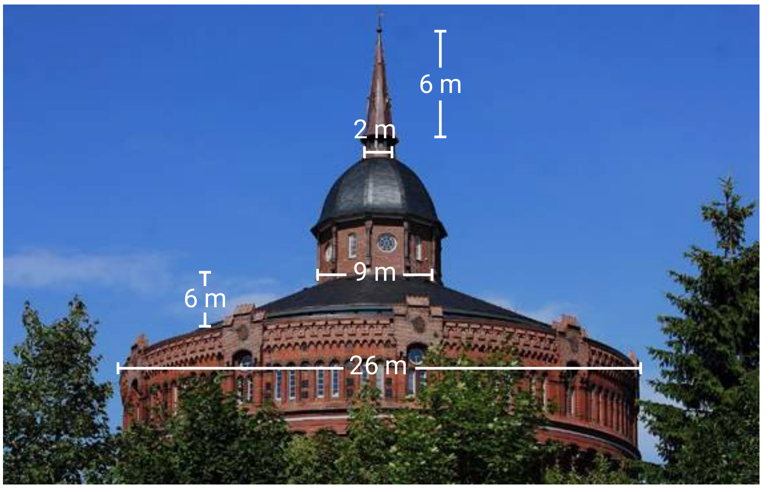
Bei der Lösung von Aufgabe 2 sind auch weitere Lösungsansätze über verschiedene geometrische Objekte und deren Kombinationen möglich.

Quellen:

https://www.mvkiel.de/ausbildung/articles/fallbeispiel-ausbildung-zum-elektroniker-in-fuer-betriebstechnik [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

9. Kupferbleche für Dachflächen



Einige Hausdächer werden mit Kupferblech bedeckt. Kupfer ist recht beständig und erfordert entsprechend wenig Wartung. Außerdem lassen sich Dächer und Fassaden mit komplizierten Geometrien damit gut eindecken. Im Laufe der Zeit ändert sich die Farbe der Dächer von der eigentlich rot-goldenen Farbe durch Einfluss von Feuchtigkeit und Sauerstoff zu ihrer typischen grünen Farbe.

Metallbauer*innen sind unter anderem für die Zuschnitte solcher Kupferbleche zuständig. Der Auszubildende zum Metallbauer Max soll für einen Kostenvoranschlag für die Erneuerung des Dachs am Kieler Wasserturm (siehe Abbildung) die Materialkosten grob abschätzen.

9. Kupferbleche für Dachflächen – Aufgaben

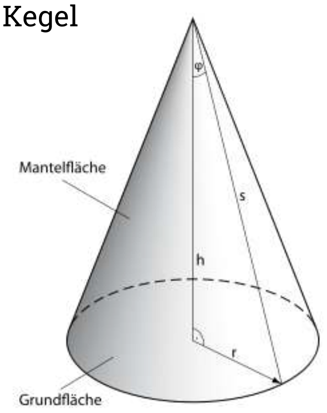
Aufgabe 1:
Welche geometrischen Körper eignen sich zur Modellierung der drei Dachflächen? Helfen Sie Max, indem Sie Skizzen mit den wichtigsten Größen zur Berechnung der Dachflächen erstellen. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der Abbildung.

Aufgabe 2:
Da es sich um eine grobe Planung handelt, soll Max mit einem Sicherheitszuschlag von 10 % planen. Für Verschnitt und Überlappungen wird anschließend ein Zuschlag von 7 % angenommen. Berechnen Sie, mit wie viel Kupferblech (Angabe in m^2) kalkuliert werden soll.

Aufgabe 3:
Recherchieren Sie aktuelle Preise für Kupferblech und geben Sie die geschätzten Materialkosten bei einer Blechdicke von 2 mm an.

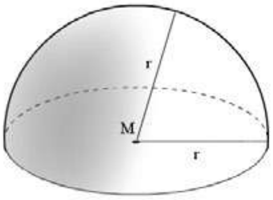
Hilfekarten:

Kegel



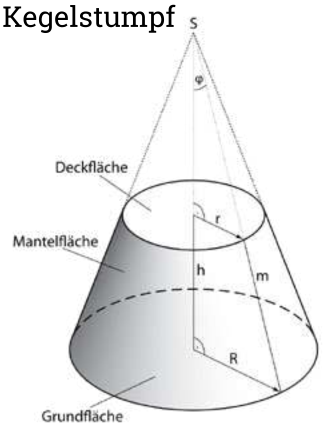
$M_1 = \pi \cdot r \cdot s$

Halbkugel



$M_2 = \frac{1}{2} \cdot (4\pi r^2)$

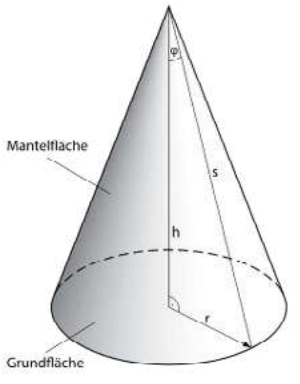
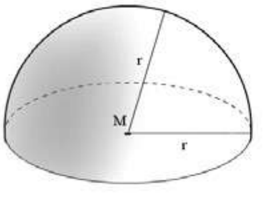
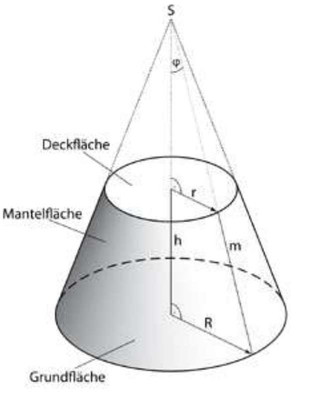
Kegelstumpf



$M_3 = \pi \cdot m \cdot (R + r)$

9. Kupferbleche für Dachflächen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Oberer Teil des Daches: Kegel	Mittlerer Teil des Daches: Halbkugel	Unterer Teil des Daches: Kegelstumpf
		
$h = 6$ m, $r = 1$ m, s muss berechnet werden.	Aus $d = 9$ m ergibt sich der Radius $r = 4{,}5$ m.	$R = 13$ m, $h = 6$ m, $r = 4{,}5$ m, m muss berechnet werden.

Lösung Aufgabe 2:

Mantelfläche 1 (Kegel): $M_1 = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 1\,\text{m} \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \cdot 1\,\text{m} \cdot \sqrt{1^2 + 6^2}\,\text{m}$
$= 19{,}11\,\text{m}^2$

Mantelfläche 2 (Halbkugel): $M_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (4{,}5\,\text{m})^2$
$= 127{,}23\,\text{m}^2$

Mantellinie Kegelstumpf: $m = \sqrt{(R - r)^2 + h^2} = \sqrt{(13\,\text{m} - 4{,}5\,\text{m})^2 + (6\,\text{m})^2}$
$= 10{,}4\,\text{m}$

Mantelfläche 3 (Kegelstumpf): $M_3 = \pi \cdot m \cdot (R + r) = \pi \cdot 10{,}4\,\text{m} \cdot (13\,\text{m} + 4{,}5\,\text{m})$
$= 572{,}01\,\text{m}^2$

Kupferblech Kalkulation: $1{,}1 \cdot 1{,}07 \cdot (M_1 + M_2 + M_3) =$
$1{,}1 \cdot 1{,}07 \cdot (19{,}11\,\text{m}^2 + 127{,}23\,\text{m}^2 + 572{,}01\,\text{m}^2)$
$= 845{,}5\,\text{m}^2$

Lösung Aufgabe 3:

Bei einem Preis von 440 € pro m² Kupferblech liegen die Materialkosten im Kostenvoranschlag bei $440\,\frac{€}{\text{m}^2} \cdot 845{,}5\,\text{m}^2 = 372.020\,€$.

9. Kupferbleche für Dachflächen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Auszubildender zum Metallbauer berechnet Dachflächen mit unterschiedlichen geometrischen Figuren.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Berechnung der Oberfläche von Halbkugel, Kegel und Kegelstumpf, Satz des Pythagoras oder wahlweise Strahlensatz
4. Mögliche Schwierigkeiten: Recherche der Preise für Kupferbleche, Wahl einer geeigneten geometrischen Figur zur Annäherung für den mittleren Teil des Daches
5. Angesprochenes Berufsfeld: Metallbauer*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 1 bzw. Aufgabe 2: Nutzung der Hilfekarten
- Ergänzung zu Aufgabe 1 für leistungsstarke Schüler*innen:

Aufgabe 1*

Nähern Sie die Form der mittleren Dachfläche mit Hilfe eines geeigneten Pyramidenstumpfes an.

Lösung Aufgabe 1*:

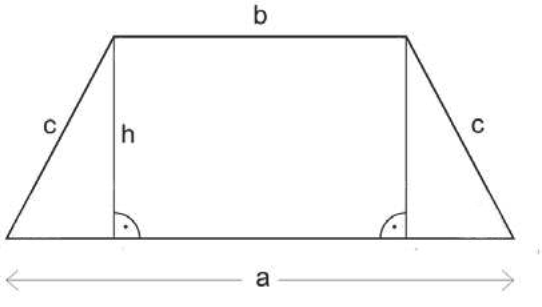
Pyramide mit achteckiger Grundfläche, gesucht ist deren Mantelfläche M_2. Die Höhe der Figur ist zu schätzen oder vorab anzugeben (geeignet wäre z.B. $h = 5\,\mathrm{m}$), die Seitenflächen des Daches sind jeweils (gleichschenklig) trapezförmig.

Die seitliche Kantenlänge $c = \sqrt{\left(\frac{9\,\mathrm{m}}{2} - \frac{2\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 + 5\,\mathrm{m}^2}$ ergibt sich durch den Querschnitt des Daches (ebenfalls trapezförmig). Die unteren und oberen Kantenlängen berechnet man mit Hilfe des Umkreises der achteckigen Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes.

$$a = \frac{9\,\mathrm{m}}{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}} = 3{,}444\,\mathrm{m}$$

$$b = \frac{2\,\mathrm{m}}{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}} = 0{,}765\,\mathrm{m}$$

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 5{,}95\,\mathrm{m}$$



$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = 12{,}53\,\mathrm{m}^2$ für jede Seitenfläche, also ist $M_2 = 8 \cdot A = 100{,}26\,\mathrm{m}^2$.

Didaktischer Kommentar:

Um die Länge der Mantellinie m des Kegelstumpfes für die untere Dachfläche zu berechnen, kann wahlweise auch mit Strahlensatz statt Satz des Pythagoras gearbeitet werden.

Quellen:

https://www.bleche-onlineshop.de/kupfer-tafelbleche/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Kai Bertallot, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

10. Modellierung eines Zylinderkopfes

Das Dienstleistungsunternehmen TechLas bearbeitet Bauteile aus dem Motorraum und Antriebsstrang von Kraftfahrzeugen. Als Industriemechaniker*in bei TechLas ist man mit der Konstruktion und Fertigung solcher Bauteile beschäftigt.

Ein Kraftfahrzeughersteller beauftragt die Firma TechLas mit der Herstellung von 4.000 Zylinderköpfen für ihre geplante Fahrzeugserie FS103. Dabei soll der Zylinderkopf eine Höhe von 5 cm und einen Durchmesser von 6 cm haben. Der Zylindermantel hat eine Dicke von 1 cm. Der Zylinder ist also innen hohl, schließt aber auf der Oberseite mit einer ebenfalls 1 cm dicken Deckfläche. Weiter hat er zwei Einkerbungsringe mit jeweils einer Höhe von 2 mm und einer Einkerbungstiefe von 2 mm.

In einem ersten Arbeitsschritt wird die Form näherungsweise aus Stahl gegossen und danach in weiteren Arbeitsschritten auf ihre präzise Form gefräst.

10. Modellierung eines Zylinderkopfes – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Materialkosten für alle 4.000 Zylinderköpfe.*

*Hinweis: Die Dichte von legiertem Stahl beträgt 7,9 g/m^3 und Stahl kostet ca. 6.000 € pro Tonne.

Aufgabe 2:

Die Materialkosten sind nur eine Kostenposition für die Herstellung der Zylinderköpfe. Recherchieren Sie, welche weiteren Kosten es gibt.

10. Modellierung eines Zylinderkopfes – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Durchmesser Zylinderkopf: $d = 6\,\text{cm}$

Radius Zylinderkopf: $r_1 = \frac{d}{2} = \frac{6\,\text{cm}}{2} = 3\,\text{cm}$

Radius abzügl. Manteldicke: $r_2 = \frac{d - 2 \cdot 1\,\text{cm}}{2} = \frac{6 - 2\,\text{cm}}{2} = 2\,\text{cm}$

Höhe Zylinderkopf: $h_1 = 5\,\text{cm}$

Höhe ohne Deckfläche: $h_2 = 5\,\text{cm} - 1\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$

Volumen Zylinder (komplett massiv): $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot 5\,\text{cm} = 47{,}12\,\text{cm}^3$

Volumen Zylinderkopf-Hohlraum: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot 4\,\text{cm} = 16{,}76\,\text{cm}^3$

Stahlvolumen pro Zylinderkopf: $V = V_1 - V_2 = 47{,}12\,\text{cm}^3 - 16{,}76\,\text{cm}^3 = 30{,}36\,\text{cm}^3$

Die Einkerbungen werden erst nach dem Gießen gefräst, sodass sie für die Berechnung der Kosten keine Rolle spielen.

Gesamtgewicht: $G = 4.000 \cdot 30{,}36\,\text{cm}^3 \cdot 7{,}9\,\frac{g}{\text{cm}^3} = 959.376\,\text{g} = 0{,}9594\,\text{t}$

Gesamtkosten (inkl. 10 % Puffer): $K = 1{,}1 \cdot 0{,}9594\,\text{t} \cdot 6.000\,\frac{€}{\text{t}} = 6.332{,}04\,€$

Lösung Aufgabe 2:

Weitere mögliche Kostenpositionen:

- Fertigungslohn
- Kosten für das Fertigungsmaterial
- Verwaltungskosten
- Vertriebskosten
- Steuern

10. Modellierung eines Zylinderkopfes – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Kostenplanung bei der Herstellung von Zylinderköpfen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L2: Messen
3. Vorwissen: Volumen Zylinder, zusammengesetzte Volumen
4. Mögliche Schwierigkeiten: Einkerbungen in der Aufgabe bei der Kostenplanung mitdenken
5. Angesprochenes Berufsfeld: Industriemechaniker*in, Betriebswirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 1: Hinweis weglassen.

Quellen:

http://www.nutech.de/de/ausbildung [letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.brucewilles.de/massenausgleich.html [letzter Zugriff: 010.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

11. Energie eines Lasers

Bei der Verarbeitung von Metall, Stahl und Aluminium kommen sogenannte Kohlendioxid-Laser (kurz: CO_2-Laser) zum Einsatz. Das von dem Laser ausgestrahlte Licht (umgangssprachlich Laserstrahl) trifft auf das Material und gibt dabei Energie ab. Das Material wird dadurch erhitzt und an dieser Stelle „geschnitten“. So können Zuschnitte auf den Mikrometer genau erreicht werden.

Wie groß die übertragene Energie ist, hängt dabei von der Wellenlänge λ des Laserlichts ab. Bei einem CO_2-Laser liegt sie bei $\lambda_{CO_2} = 10.600\,\text{nm}$. Die übertragene Energie E des Lichts kann mit Hilfe der Gleichung $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ berechnet werden. Dabei beträgt $h \cdot c = 1.240\,\text{eV} \cdot \text{nm}$.

11. Energie eines Lasers – Aufgaben

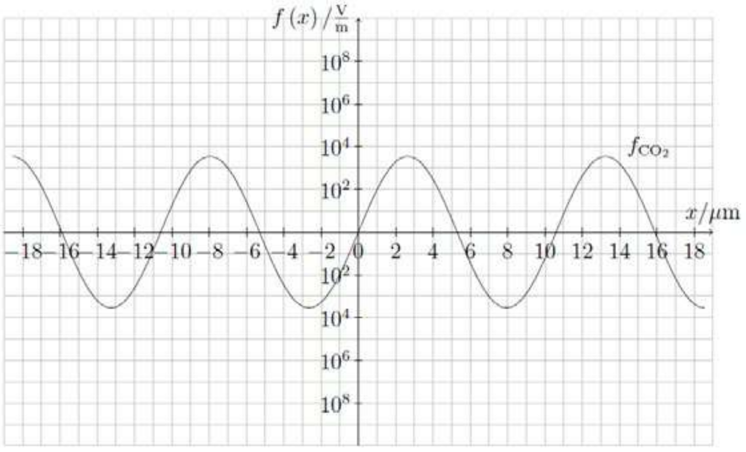
Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Energie, die von einem CO_2-Laser übertragen werden kann. Geben Sie dabei Ihr Ergebnis in eV an.

Aufgabe 2:

Das Laserlicht besteht aus sogenannten schwingenden Wellen. Der Funktionsgraph *F* zeigt die Momentaufnahme einer Welle des CO_2-Laserlichts. Der Graph lässt sich beschreiben durch die Sinusfunktion in der Form $f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + b\right)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, indem Sie mögliche Werte für die Parameter *A* und *b* mithilfe des Funktionsgraphen bestimmen. Begründen Sie Ihre Herangehensweise.

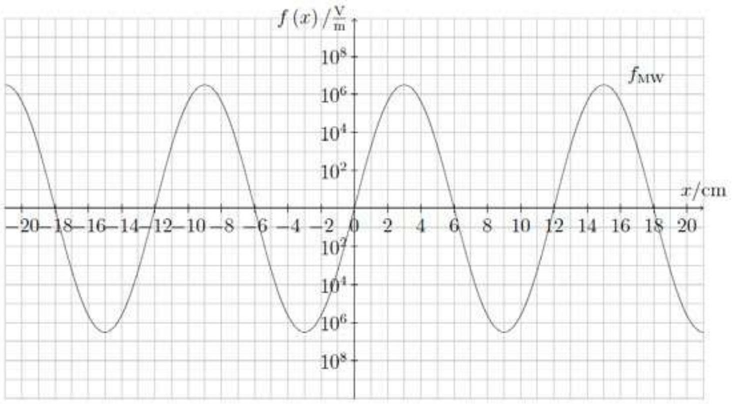


Funktionsgraph *F*

Aufgabe 3:

Der Funktionsgraph *G* zeigt die Momentaufnahme einer Mikrowelle. Würde die Energie von Mikrowellen ebenfalls für die Verarbeitung der oben genannten Materialien ausreichen?*

*Hinweis: Bestimmen Sie wie in Aufgabe 2 zunächst die Funktionsgleichung.



Funktionsgraph *G*

11. Energie eines Lasers – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

$$E_{CO_2} = \frac{h \cdot c}{\lambda} = 1.240\,\text{eV} \cdot \text{nm} = 0{,}117\,\text{eV}$$

Lösung Aufgabe 2:

Ablesen vom Funktionsgraphen liefert folgende beiden markante Wertepaare:

$P_1(0|0)$ $P_2(8|-5.000)$ (x-Werte in µm, y-Werte in $\frac{\text{V}}{\text{m}}$)

Der λ-Wert für den CO_2-Laser ist in nm angegeben, daher ($8\,\mu\text{m} = 8.000\,\text{nm}$) Verwendung von $P_2^*(8.000|-5.000)$ statt P_2.
Mit $\lambda_{CO_2} = 10.600\,\text{nm}$ folgt $\frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi}{10.600\,\text{nm}} = 0{,}00059 \cdot \frac{1}{\text{nm}}$, also

$$f(x) = A \cdot \sin(0{,}00059x + b)$$

P_1 liefert

$0 = A \cdot \sin(b) \Rightarrow A = 0$ ↯ (f wäre konstante Funktion und keine Sinusfunktion) oder

$b \in \mathbb{Z}$, z. B. $b = 0$.

Mit P_2^* gilt dann

$$-5.000 = A \cdot \sin(0{,}00059 \cdot 8.000)\text{, also}$$

$$A = \frac{-5.000}{\sin(0{,}00059 \cdot 8.000)} = 5.000.$$

Alternativ kann auch über die Eigenschaften der Sinusfunktion argumentiert und b als Verschiebung von F auf der x-Achse (b = 0) und A (= 5.000) als Amplitude von F identifiziert werden.

Lösung Aufgabe 3:

Die Wellenlänge λ_{MW} für Mikrowellen ist hier unbekannt.
Analog zu Aufgabe 2 können b und A als x-Achsenverschiebung und Amplitude von G abgelesen werden ($b = 0, A = 5.000.000$) und für die zugehörige Funktion gilt:

$$g(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{MW} \cdot x + b}\right) = 5.000.000 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{MW} \cdot x}\right)$$

Mit dem abgelesenen Punkt $P_3(3\,\text{cm}|5.000.000\,\frac{\text{V}}{\text{m}})$ kann λ berechnet werden:

$$\begin{aligned} & 5.000.000\,\tfrac{\text{V}}{\text{m}} = 5.000.000\,\tfrac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{MW} \cdot 3\,\text{cm}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{MW} \cdot 3\,\text{cm}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{MW} \cdot 3\,\text{cm}} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_{MW} = 4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm} = 120\,\text{mm} = 120.000.000\,\text{nm} \end{aligned}$$

Die übertragen Energie der Mikrowelle beträgt dann

$$E_{MW} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{MW}} = \frac{1.240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{120.000.000\,\text{nm}} = 0{,}0000103\,\text{eV}$$

und damit nur $\frac{1}{10.000}$-stel der Energie des CO_2-Lasers. Sie reicht bei weitem nicht aus.

11. Energie eines Lasers – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ermittlung der Übertragungsenergien beim Laserschneiden mit CO_2-Lasern und Mikrowellen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Elementare Eigenschaften der Sinusfunktion, Grundlagen des physikalischen Inhaltsbereichs „Wellen“
4. Mögliche Schwierigkeiten: Exponentielle Skalierung der y-Achsen in Aufgabe 2 und 3, Umrechnung µm/nm in Aufgabe 2 und cm/nm in Aufgabe 3
5. Angesprochenes Berufsfeld: Lasertechnische*r Assistent*in, Konstruktionsmechaniker*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Physik

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 2 und 3: A beschreibt die Amplitude, b die Verschiebung in x-Richtung des Funktionsgraphen.
- Zu Aufgabe 2 und 3: $0{,}1\,\text{cm} = 1\,\text{mm} = 1.000\,\mu\text{m} = 1.000.000\,\text{nm}$

Quellen:

https://www.trumpf.com/de_DE/produkte/laser/co2-laser/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]
Tipler, P.A. & Mosca, G. (2009). *Phsik für Wissenschaftler und Ingenieure, 6. Auflage*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 590 f., 1217 f., 1223–1225.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Christopher Ernsting, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

III. Landwirtschaft & Ernährung


22 EN
087
Türk Traktör

12. Auslauffläche für Bio-Legehennen

Der Landwirt Hans Müller möchte seinen Betrieb zukünftig um Bio-Legehennen erweitern und stellt daher vorab eine Platzkalkulation an. Er hat dafür einen Acker mit einer Fläche von knapp 8 ha zur Verfügung. Pro Legehenne muss laut EU-Bio-Verordnung mindestens $\frac{1}{6}\,m^2$ Platz im Stall vorhanden sein. Ein Stall darf maximal 3.000 Legehennen enthalten. Hinzu kommt für jeden Stall eine eigene Auslauffläche. Sie muss so groß sein, dass jeder Henne $4\,m^2$ zustehen, damit sich die Legehennen gleichzeitig auf der Auslauffläche bewegen können.

12. Auslauffläche für Bio-Legehennen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Landwirt Müller überlegt, 12.000 Bio-Legehennen anzuschaffen. Ermitteln Sie, wie groß die Ställe und die Auslaufflächen pro Stall mindestens sein müssen.

Aufgabe 2:

Damit sich die Hennen möglichst gleichmäßig in der Auslauffläche bewegen können, ist es nicht sinnvoll, einen länglichen schmalen Auslauf zu bauen. Auch wenn die Flächengröße stimmt, werden die Hennen sich immer in der Nähe des Stalls aufhalten. Überlegen Sie, was für eine Art von Auslauf in welcher Abmessung für die Hennen sinnvoller wäre, sodass sie sich gleichmäßiger auf ihr verteilen können. Fertigen sie eine Skizze an.

Aufgabe 3:

Für eine erste Kostenkalkulation informiert sich Herr Müller im Internet. Erfahrende Landwirte legen dort einen Kalkulationspreis von 40 € pro Legehenne für den Stallbau nahe. Zusätzlich liegen die Kosten für jeden Meter Geflügelzaun bei 2,80 €. Berechnen Sie auf dieser Grundlage, wie viel der Bau des Stalls und der Zäune Landwirt Müller kosten würde.

12. Auslauffläche für Bio-Legehennen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Notwendige Anzahl Ställe bei 12.000 Hühnern : $\frac{12.000}{3.000} = 4$

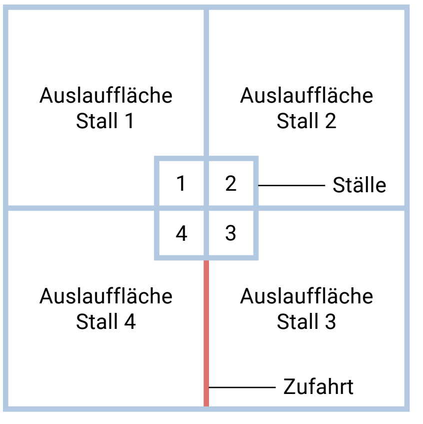
Mindestgröße je Stall : $3.000 \cdot \frac{1}{6}\,\mathrm{m}^2 = 500\,\mathrm{m}^2$

Auslauffläche pro Stall : $3.000 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = 12.000\,\mathrm{m}^2 = 1{,}2\,\mathrm{ha}$

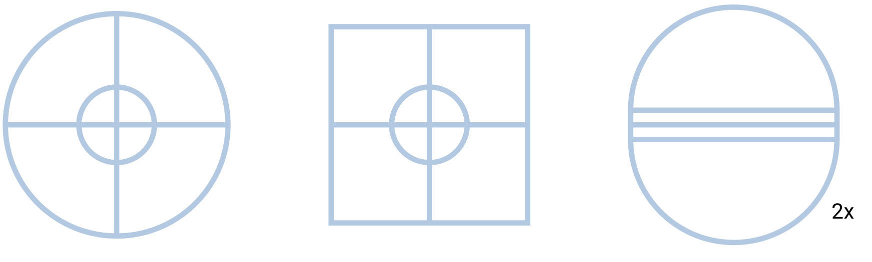
Lösung Aufgabe 2:

Es wäre zum Beispiel sinnvoll, auf einer quadratischen Fläche vier quadratische Einheiten einzurichten (je ein quadratischer Stall umgeben von einer Auslauffläche). Dabei ist auf eine uneingeschränkte Zufahrt zu achten. Die Skizze zeigt einen solchen Aufbau, der hier exemplarisch betrachtet wird. Skizzen zu weiteren Varianten finden sich weiter unten.

Jeder der vier quadratischen Ställe hat eine Seitenlänge von mindestens $\sqrt{500\,\mathrm{m}^2} = 22{,}36\,\mathrm{m}$. Mit etwas Zuschlag (Wandstärken, kleine Lagerräume und Zugänge) ergibt sich eine Seitenlänge von $25\,\mathrm{m}$ und damit für die quadratischen Auslaufflächen je eine Seitenlänge von $\sqrt{12.000\,\mathrm{m}^2 + (25\,\mathrm{m}^2)} = 112{,}36\,\mathrm{m}$, also mit Zuschlag (Zufahrt) von $115\,\mathrm{m}$. Für seine vier Ställe und Auslaufflächen braucht Landwirt Müller damit eine Fläche von $(2 \cdot 115\,\mathrm{m})^2 = 52.900\,\mathrm{m}^2 = 5{,}29\,\mathrm{ha}$. Seine Fläche von knapp $8\,\mathrm{ha}$ reicht also aus, sofern sie geeignet geschnitten ist.



Weitere denkbare Varianten:



Lösung Aufgabe 3:

Basierend auf der Variante aus Lösung Aufgabe 2:

Baukosten 4 Ställe:	$4 \cdot 3.000 \cdot 40\,€$	=	$480.000\,€$
Zaunlänge Außenzäune:	$8 \cdot 115\,\mathrm{m}$	=	$920\,\mathrm{m}$
Zaunlänge Innenzäune (doppelt an der Zufahrt):	$5 \cdot (115\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m})$	=	$450\,\mathrm{m}$
Kosten für den Auslauf (4 Ställe):	$2{,}80\,\frac{€}{\mathrm{m}} \cdot (1.370\,\mathrm{m})$	=	$3.836\,€$
Gesamtkosten:	$480.000\,€ + 3.836\,€$	=	$483.836\,€$

12. Auslauffläche für Bio-Legehennen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt plant den Bau eines Stalls für Bio-Legehennen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Geometrie an Vierecken und am Kreis
4. Mögliche Schwierigkeiten: Sinnvolle Form für die Auslaufflächen in Aufgabe 2 finden
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie, Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 2: Geometrische Form für die Auslaufflächen vorgeben.

Didaktischer Kommentar:

In Aufgabe 2 können verschiedene Varianten für Stall- und Auslauffläche berechnet werden. Einige sind auf der vorherigen Seite skizziert. Es lassen sich noch weitere finden. Eine uneingeschränkte Zufahrt zu den Ställen sollte dabei jederzeit möglich sein. Die verschiedenen Varianten können miteinander hinsichtlich Flächenbedarf, Materialkosten und praktischem Nutzen verglichen werden.

Bei Aufgabe 3 kann alternativ auch eine andere Zaunlänge berechnet werden, sollte sich in Aufgabe 2 eine andere Form der Auslaufflächen als sinnvoll erweisen.

Quellen:

https://www.landwirtschaftskammer.de/landwirtschaft/oekolandbau/pdf/oekovo-mkulnv.pdf
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.landlive.de/tiere/nutztiere/gefluegel/huehnernetz-oder-huehnerzaun/
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.weidezaun.info/voss-farming-gefluegel-premium-komplett-set-netz-tuer.html
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

13. Futtermix

Ein Legebetrieb möchte die folgenden zwei Futtersorten mischen, um die Futterzufuhr für seine Legehennen biologischer zu gestalten.

1. BIO 5-Sterne Legehennenfuttermittel, 25 kg zu 24,09 €
2. 5-Sterne Legehennenfuttermittel, 25 kg zu 14,79 €

Auf diese Weise erhofft sich der Betrieb ein positiveres Image sowie gesündere und kräftigere Hennen. Insgesamt hat der Legebetrieb 32.000 Hennen, die pro Tag jeweils 130 g Futter fressen.

13. Futtermix – Aufgaben

Aufgabe 1:

Aus Werbegründen wäre eine 50/50-Zusammensetzung beider Futtermittel sinnvoll. Ermitteln Sie die täglichen Futterkosten, die dem Betrieb so entstehen.

Aufgabe 2:

Wie viel Prozent würde der Betrieb dann pro Tag an Futter mehr ausgeben, wenn vorher ausschließlich Futter ohne Bioanteil verfüttert wurde?

Aufgabe 3:

Der Finanzplan des Betriebs erlaubt für die neue Futterzusammensetzung jedoch nur eine Kostensteigerung von 20 %. Beraten Sie den Betrieb, wie hoch der Bio-Anteil im Futter maximal sein kann.

13. Futtermix – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Futtermenge pro Tag: $32.000 \cdot 130\,\mathrm{g} = 4.160.000\,\mathrm{g} = 4.160\,\mathrm{kg}$

Gesamtpreis 50/50-Zusammensetzung: $\dfrac{2.080\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 24{,}09\,€ + \dfrac{2.080\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 14{,}79\,€ = 3.234{,}82\,€$

Lösung Aufgabe 2:

Die Kosten ohne Verwendung von Bio-Futter belaufen sich auf $\frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 14{,}79\,€ = 2461{,}06\,€$ täglich. Der Betrieb würde pro Tag $3.234{,}82\,€ - \left(\frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 14{,}79\,€\right) = 773{,}76\,€$ mehr zahlen, was einem Prozentsatz von $\frac{100\,\%}{2.461{,}06\,€} \cdot 773{,}76\,€ = 31{,}44\,\%$ entspricht.

Lösung Aufgabe 3:

Neues Futterbudget: $1{,}2 \cdot \left(\frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 14{,}79\,€\right) = 2.953{,}27\,€$

Bezeichne x die Anzahl der Futtersäcke des Bio-Futters und y die Anzahl der Futtersäcke des Nicht-Bio-Futters. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\ & 25\,\mathrm{kg} \cdot x + 25\,\mathrm{kg} \cdot y = 4.160\,\mathrm{kg} \\
\text{II.}\ & x \cdot 24{,}09\,€ + y \cdot 14{,}79\,€ = 2.953{,}27\,€ \\
\text{I}'.\ & \frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} - y = x \\
\text{I}' \frown \text{II.}\ & y = \frac{2.953{,}27\,€ - \frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} \cdot 24{,}09\,€}{14{,}79\,€ - 24{,}09\,€} = 113{,}47 \\
y \frown \text{I}'.\ & x = \frac{4.160\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} - 113{,}47 = 52{,}93
\end{aligned}$$

Der Betrieb müsste also 114 Säcke Nicht-Bio-Futter und 53 Säcke Bio-Futter kaufen.
Mit $114 \cdot 14{,}79\,€ + 53 \cdot 24{,}09\,€ = 2.962{,}83\,€$ läge er jedoch leicht über dem Budget.
Mit 115 Säcken Nicht-Bio-Futter und 52 Säcken Bio-Futter könnte das neue Budget gehalten werden. Dies entspräche einem Anteil von $52 \cdot \frac{100\,\%}{167} = 31{,}14\,\%$ Bio-Futter.

13. Futtermix – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Legebetrieb plant eine Umstellung des Legehennenfutters aus wirtschaftlicher Sicht.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K5: Mit formalen, symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl
3. Vorwissen: Prozentrechnung, Lineare Gleichungssysteme
4. Mögliche Schwierigkeiten: LGS aufstellen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Zu Aufgabe 3: Annäherung mittels Tabelle

Didaktischer Kommentar:

In Aufgabe 3 geht es um eine praktische Umsetzung einer Futtermittelmischung. Daher muss dort berücksichtigt werden, dass die Futtermittel in festgelegten Verkaufseinheiten erworben werden. Für Aufgabe 1 ist dies hingegen nicht relevant, da es sich dabei um die Berechnung durchschnittlicher Kosten handelt.

Quellen:

https://www.baywa.de/de/search/?text=h%C3%BChnerfutter [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

14. Schweinemast

Tierwirt Andresen führt einen Schweinemastbetrieb, der 30 kg schwere Ferkel kauft und diese mästet. Wenn die Schweine 118 kg schwer sind, werden sie geschlachtet. Für die Kostenberechnungen nutzt er ein Excel-Programm, welches kostenlos im Internet bereitgestellt wird. Dabei werden die Abkürzungen LG für das Lebendgewicht der Schweine und SG für das Schlachtgewicht der Schweine verwendet. Die Ausschlachtung (Ausschl.) gibt den prozentualen Anteil des Schweines an, der nach dem Ausnehmen zur Weiterverarbeitung bestimmt ist.

Öffnen Sie die zu dieser Aufgabe zugehörige Excel-Tabelle. Die grau hinterlegten Felder lassen sich für die bestimmten Annahmen des Betriebes verändern und die Zelle unten rechts gibt den kg-Preis an, der beim Verkauf erzielt werden muss, um die Kosten zu decken.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	>>> Direktkostenfreie Leistung Mastschwein <<<										03.09.2010
2		kg LG:		% Ausschl.:			kg SG:		Euro/kg SG:		
3	Vermarktung:	118,0	x	79,0	=		93,2	kg x	1,37	=	127,68
4								- CMA			0,51
5								- Vers./Erfassung:			8,49
6	Zunahmen:	720	g								118,68
7	Futterkosten	0,81	Euro/kg Zuwachs					+ MWS	10,7	% =	131,38
8				Euro/kg				+ Gebühr/Transport			
9	Ferkel:	30,00	x	1,40	+	7,0	% MWSt		2,00	=	46,94
10				Futterverwertung							
11	Futter:	88,00	x	3,00	*		27,00	Euro/dt		=	71,28
12	Sonst. var. Kosten:										7,00
13	eigener Transport:										0,00
14	Verluste:			2,5	%		bei ca.		60	kg	1,78
15	Zinsansatz:			0,0	%		bei	122	Masttagen		0,00
16	Direktkosten:										127,00
17				>>>Direktkostenfreie Leistung/ Schwein:							4,38
18											
19	AKh/Schwein:	0,40			=		Euro DkfL/AKh:				10,96
20	Umtriebe:	2,55			=		Euro DkfL/Platz:				11,17
21	erforderliche DkfL/Platz:			60	=>		dazu nötiger Preis: Euro/kg				1,56

14. Schweinemast – Aufgaben

Aufgabe 1:
Die Zelle G3 gibt das Schlachtgewicht in kg an. Erläutern Sie, wie dieser Wert zustande kommt.

Aufgabe 2:
Erläutern Sie die Formel für den Futterpreis in Zelle K11 und für die Masttage in Zelle H15.

Aufgabe 3:
Aktualisieren Sie den Verkaufspreis ($\frac{€}{kg}$ SG) auf 1,67 € und erweitern Sie die Excel-Tabelle um eine Zelle, die den Gewinn in $\frac{€}{kg}$ SG angibt und den Wert sinnvoll rundet. Notieren Sie sich diesen Wert.

Aufgabe 4:
Herr Andresen überlegt sich, ob er dänische Ferkel kaufen soll. Diese haben eine 100 g höhere (tägliche Gewichts-)Zunahme und eine besonders gute Futterverwertung von 2,6. Dies führt jedoch zu einer Ausschlachtung, die um 1 % geringer ist. Des Weiteren kosten die Ferkel 1,60 $\frac{€}{kg}$ und deren Fleisch lässt sich aufgrund der etwas geringeren Fleischqualität zum selben Zeitpunkt nur für 1,59 $\frac{€}{kg}$ verkaufen. Überprüfen Sie, ob sich der Kauf von dänischen Ferkeln für Herrn Andresen rentieren würde.

14. Schweinemast – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Das Schlachtgewicht (SG) ist das Produkt aus dem Lebendgewicht (LG) und der Ausschlachtung, d. h. dem Anteil des Schweins, der nach dem Ausnehmen übrig bleibt. Da die Ausschlachtung in Prozent angegeben wird, wird das Ergebnis durch 100 dividiert. Der Befehl „Runden(...,1)“ bewirkt das Runden auf eine Nachkommastelle.

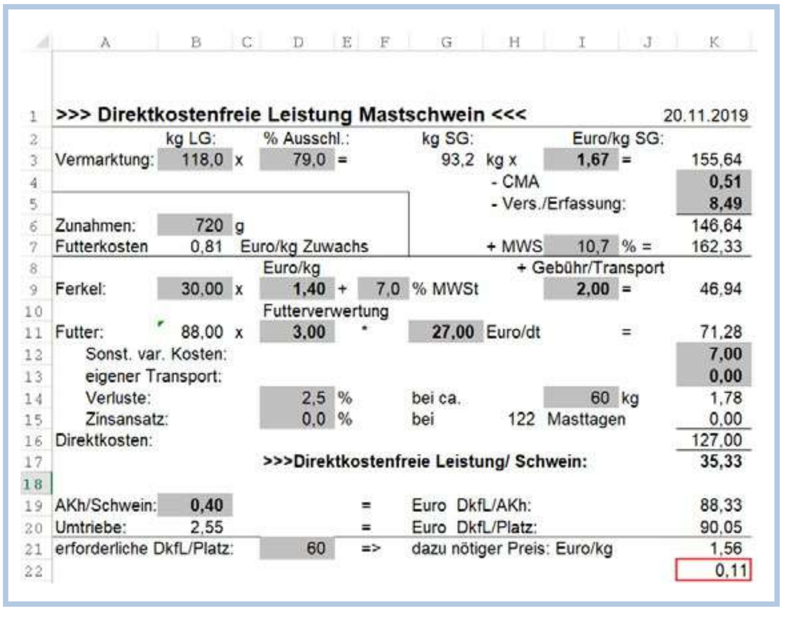
Lösung Aufgabe 2:

Futterpreis:
Der Futterpreis ist das Produkt aus der Gewichtszunahme (Lebendgewicht zum Schlachtzeitpunkt — Ferkelgewicht), der Futterverwertung (Verhältnis zwischen Futter und Gewichts-zunahme) und dem dt-Preis für das Futter. Da die Einheit dt (Dezitonne) 100 kg entspricht, muss das Ergebnis durch 100 geteilt werden.

Masttage:
Ein Schwein muss so lange gemästet werden, bis es die Gewichtsdifferenz (B11) erreicht hat. Die tägliche Zunahme wird in Zelle B6 angegeben. Teilt man B11 durch B6, so erhält man die Masttage, wobei mit dem Faktor 1.000 multipliziert werden muss, da die tägliche Zunahme in Gramm und die Gewichtsdifferenz in Kilogramm ausgegeben werden.

Lösung Aufgabe 3:

Zelle I3 auf 1,67 stellen. Erweiterung der Tabelle um eine Zelle mit Befehl „=I3-K21“. Rechtsklick auf die Zelle - Zelle formatieren - Nachkommastellen: 2. Der Gewinn beträgt dann 0,11 $\frac{€}{kg}$.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	>>> Direktkostenfreie Leistung Mastschwein <<<										20.11.2019
2		kg LG:		% Ausschl.:			kg SG:		Euro/kg SG:		
3	Vermarktung:	118,0	x	79,0	=		93,2	kg x	1,67	=	155,64
4								- CMA			0,51
5								- Vers./Erfassung:			8,49
6	Zunahmen:	720	g								146,64
7	Futterkosten	0,81	Euro/kg Zuwachs					+ MWS	10,7	% =	162,33
8				Euro/kg				+ Gebühr/Transport			
9	Ferkel:	30,00	x	1,40	+	7,0	% MWSt		2,00	=	46,94
10				Futterverwertung							
11	Futter:	88,00	x	3,00	*		27,00	Euro/dt		=	71,28
12	Sonst. var. Kosten:										7,00
13	eigener Transport:										0,00
14	Verluste:			2,5	%		bei ca.		60	kg	1,78
15	Zinsansatz:			0,0	%		bei	122	Masttagen		0,00
16	Direktkosten:										127,00
17				>>>Direktkostenfreie Leistung/ Schwein:							35,33
18											
19	AKh/Schwein:	0,40				=	Euro DkfL/AKh:				88,33
20	Umtriebe:	2,55				=	Euro DkfL/Platz:				90,05
21	erforderliche DkfL/Platz:			60		=>	dazu nötiger Preis: Euro/kg				1,56
22											0,11

Lösung Aufgabe 4:

Zelle	B6	D11	D3	D9	I3
Einstellung	820	2,6	78	1,6	1,59

Der Gewinn bei Mästung der dänischen Ferkel beträgt dann 0,07 $\frac{€}{kg}$, also weniger als bei den ursprünglichen Ferkeln (0,11 $\frac{€}{kg}$). Für Landwirt Andresen würde sich der Kauf von dänischen Ferkeln also **nicht** rentieren.

14. Schweinemast – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Tierwirt optimiert seine Schweinemast mit einem Excel-Programm.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Grundlegende Excel-Kenntnisse
4. Mögliche Schwierigkeiten: Situationsverständnis im Kontext Tierschlachtung
5. Angesprochenes Berufsfeld: Tierwirt*in, Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Informatik, Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Hinweis zu Aufgabe 1: Der Befehl „Runden(...,1)“ bewirkt das Runden auf eine Nachkommastelle.
- Hinweis zu Aufgabe 2: 1 dt = 100 kg

Quellen:

https://www.schweine.net/bild-der-woche/dr-hortmannscholten-niedersaechsische-ferkel-oeko.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

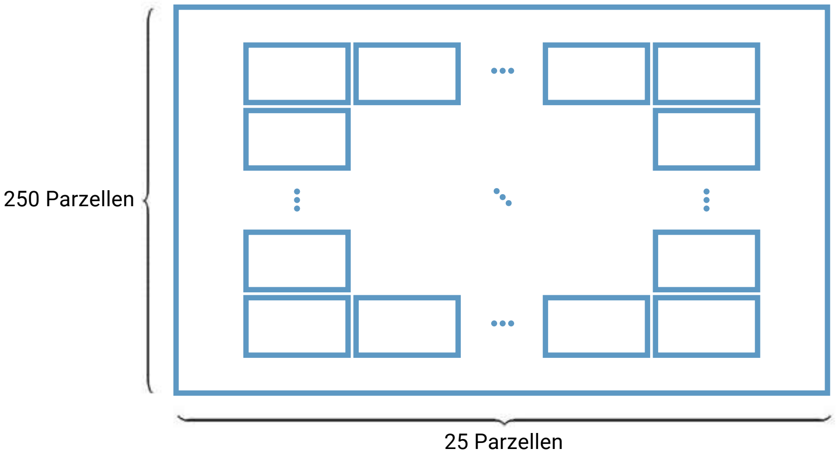
Hinweis:

Die zugehörige Excel-Datei findet sich unter *www.panama-project.eu*.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

15. Versuchsfeldplanung

Eine Pflanzentechnologin will ein Versuchsfeld zur Untersuchung verschiedener Getreidesorten planen. Die Sorten werden in Parzellen angebaut. Das sind kleine rechteckige Felder mit einer Breite von 1,5 m und einer Länge von 7 m. Die Pflanzentechnologin ordnet die Parzellen so an, dass 250 Parzellen nebeneinander und 25 Parzellen hintereinander liegen (vgl. folgende Abbildung). Um das Versuchsfeld herum soll ein Weg für die Traktoren gebaut werden, der überall gleich breit ist. Das gesamte Feld, auf dem der Versuch ausgesät werden soll, darf aus versicherungstechnischen Gründen eine Größe von 6,9 ha nicht übersteigen.



15. Versuchsfeldplanung – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die maximale Breite des Weges. Kann der Traktor, der eine Breite von 2,5 m hat, auf dem Weg fahren oder muss die Pflanzentechnologin die Parzellenzahl reduzieren?

15. Versuchsfeldplanung – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Es beschreibe a die Breite des Weges in Metern.

Versuchsfeld-Breite :	$b = 250 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} + 2 \cdot a$
Versuchsfeld-Länge :	$l = 25 \cdot 7\,\mathrm{m} + 2 \cdot a$
Maximalfläche :	$A_{max} = 6{,}9\,\mathrm{ha} = 69.000\,\mathrm{m}^2$ also
	$69.000\,\mathrm{m}^2 = (250 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} + 2 \cdot a) \cdot (25 \cdot 7\,\mathrm{m} + 2 \cdot a)$
	$= (375 + 2 \cdot a) \cdot (175 + 2 \cdot a)$
	$= 4 \cdot a^2 + 1.100 \cdot a + 65.625$
	$\Leftrightarrow 0 = a^2 + 275 \cdot a - 843{,}75$

Lösung mit der pq-Formel:

$a_{1/2} = -137{,}5 \pm \sqrt{18906{,}25 + 843{,}75} = -137{,}5 \pm \sqrt{19750} = -137{,}5 \pm 140{,}5$

$a_1 = 3\,\mathrm{m}$ $\qquad a_2 = -278\,\mathrm{m}$ ↯ (nur positive Länge sinnvoll)

Bei dem geplanten Vorhaben bleiben 3 m Wegbreite, somit ist der Weg für den 2,5 m breiten Traktor nutzbar.

15. Versuchsfeldplanung – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Pflanzentechnologin plant ein Versuchsfeld zur Untersuchung verschiedener Getreidesorten.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Lösung quadratischer Gleichungen
4. Mögliche Schwierigkeiten: Interpretation der negativwertigen Lösung für die Wegbreite
5. Angesprochenes Berufsfeld: Pflanzentechnolog*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Zusatzaufgabe:

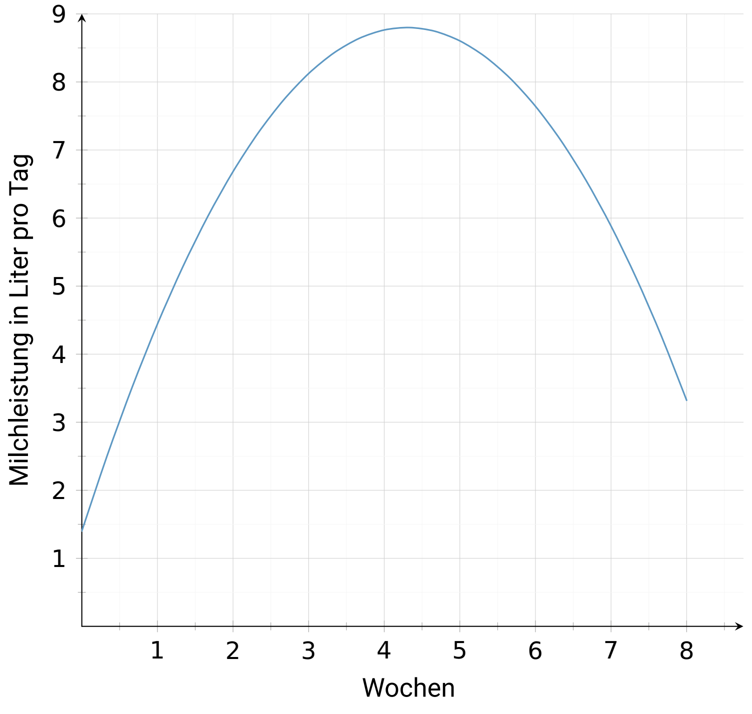
Die Versicherung hat die Bedingungen geändert. Nun ist nur noch eine Gesamtfläche von 6,8 ha zulässig. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der neuen Vorgaben die verbleibende Breite des Weges für den Traktor. Bestimmen Sie ggf. die Anzahl der Parzellen neu.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

16. Fütterung von Sauen

Die Futtermenge für Sauen, die geferkelt haben, wird an die aktuelle Milchleistung der Sau angepasst. In den Wochen, in denen die Sau besonders viel Milch gibt, muss auch mehr Futter gefüttert werden, damit alle Ferkel genügend Milch bekommen. Daher müssen Landwirt*innen gut über den Laktationsverlauf der Sauen (Zeitraum, in dem die Sau Milch gibt) Bescheid wissen.

Der typische Laktationsverlauf bei einer Sau, die zweimal täglich gefüttert wird, sieht wie folgt aus:



Durch dreimal tägliches Füttern der Sauen kann die Milchleistung auf bis zu 13 Liter pro Tag erhöht werden. Die anfängliche Milchleistung bleibt davon unverändert, ebenso der Zeitpunkt der maximalen Milchleistung.

16. Fütterung von Sauen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Entnehmen Sie der Abbildung die anfängliche und maximale Milchleistung (und die zugehörigen Zeitpunkte) des typischen Laktationsverlaufs und erstellen Sie eine Funktionsgleichung.

Aufgabe 2:

Helfen Sie den Landwirt*innen bei ihrer Planung, indem Sie auch für einen optimalen Laktationsverlauf mit bis zu 13 Litern pro Tag eine Funktionsgleichung erstellen.

16. Fütterung von Sauen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Die Kurve für den Laktationsverlauf wird als Funktion zweiten Grades (Parabel) angenommen. Bezeichne $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ mit x in Wochen eine solche Funktionsgleichung des typischen Laktationsverlaufs in Scheitelpunktsform.
Aus der Abbildung lassen sich zwei Punkte ablesen, letzterer als Scheitelpunkt:

$$P_1(0|1{,}4) \qquad P_2(4{,}25|8{,}8)$$

Damit gilt schon einmal: $f(x) = a \cdot (0 - 4{,}25)^2 + 8{,}8 = 18{,}06 \cdot a + 8{,}8$

$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1{,}4-8{,}8}{18{,}06} = -0{,}41$, also

$f(x) = -0{,}41 \cdot (x - 4{,}25)^2 + 8{,}8$

bzw. in Normalform: $f(x) = -0{,}41 \cdot x^2 + 3{,}49 \cdot x + 1{,}4.$

Lösung Aufgabe 2:

Bezeichne $g(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ mit x in Wochen eine solche Funktionsgleichung des optimalen Laktationsverlaufs in Scheitelpunktsform. Es soll $f(0) = g(0) = 1{,}4$ gelten. Zusätzlich soll g den Scheitelpunkt bei $g(4{,}25) = 13$ haben.

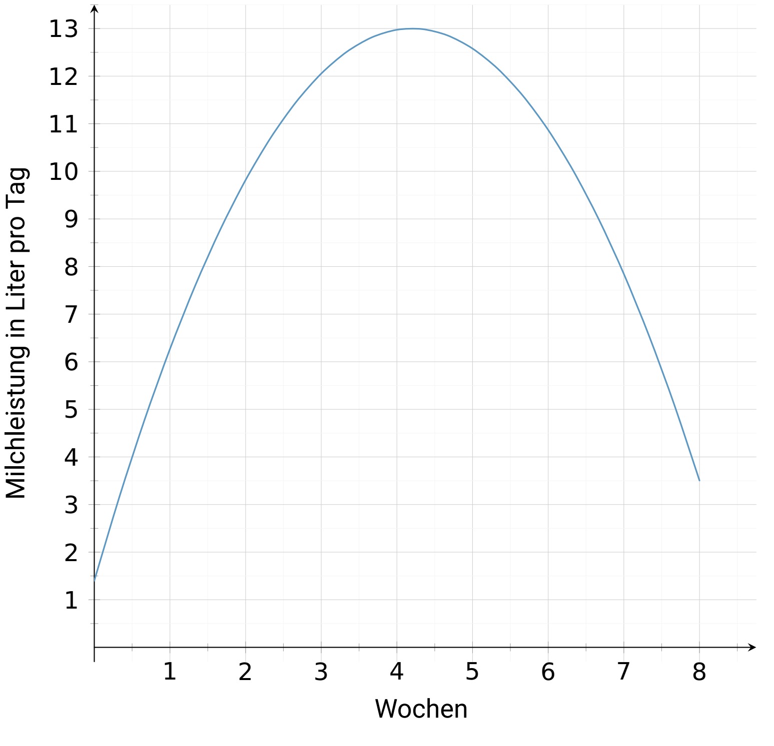
Damit gilt schon einmal: $g(x) = a \cdot (x - 4{,}25)^2 + 13$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}4 = g(0) = a \cdot (0 - 4{,}25)^2 + 13 = 18{,}06 \cdot a + 13$

$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1{,}4-13}{18{,}06} = -0{,}64$, also

$g(x) = -0{,}64 \cdot (x - 4{,}25)^2 + 13$

bzw. in Normalform: $g(x) = -0{,}64 \cdot x^2 + 5{,}44 \cdot x + 1{,}4.$



16. Fütterung von Sauen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Die Funktionen für typische und optimale Laktationsverläufe von Sauen sollen bestimmt werden.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Scheitelpunktsform einer Parabel
4. Mögliche Schwierigkeiten: Geeignete Modellierung für die Funktionsgleichung (Funktion zweiten Grades) finden
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Didaktischer Kommentar:

In höheren Klassenstufen lassen sich die Funktionsgleichungen auch durch die erste Ableitung (Scheitelpunkt, Verwendung eines LGS) bestimmen. Dann ist die Kenntnis der Scheitelpunktsform nicht mehr notwendig.

Quellen:

Kirchgeßer, M. (2008): *Tiernahrung. Leitfaden für Studium, Beratung und Praxis, 12. Auflage.* Frankfurt: DLG.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

17. Sämaschine

Damit die Aussaat auf einem Getreidefeld gut gelingt, müssen die Landwirt*innen das Saatgut mit einer Sämaschine gleichmäßig in einer genauen Menge pro m^2 aussäen. Als optimales Verhältnis hat sich dabei für Weizen 250 Saatkörner pro m^2 herausgestellt.

An der Sämaschine kann mit einem Getriebe die Menge Saatgut pro Radumdrehung verändert werden. Zum Kontrollieren der Einstellung der Maschine wird eine sogenannte Abdrehprobe gemacht. Dabei werden alle Körner aufgefangen und gewogen, die bei einer Umdrehung des Rades aus der Maschine herausfallen.

Landwirt Kowalski arbeitet mit einer Sämaschine mit einem Raddurchmesser von 75 cm und einer Breite von 3 m.

17. Sämaschine – Aufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Anzahl der Körner, die bei der Abdrehprobe aufgefangen werden, wenn die optimale Aussaatmenge erreicht ist.

Aufgabe 2:

Landwirt Kowalski hat sich eine neue Sämaschine gekauft. Die Maschine hat denselben Raddurchmesser, ist aber 4 m breit. Berechnen Sie hierfür die Anzahl der Körner, die herauskommen müsste, damit ebenfalls eine optimale Menge Saatgut auf einem Quadratmeter wächst.

Aufgabe 3:

Wie kann Landwirt Kowalski die Anzahl der Körner in der Abdrehprobe bestimmen, ohne sie alle zählen zu müssen?

17. Sämaschine – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Bei einem Durchmesser von $d = 0{,}75\,\mathrm{m}$ und einer Maschinenbreite von $b = 3\,\mathrm{m}$ ergibt sich mit dem Umfang $U = d \cdot \pi$ eine Mantelfläche M von

$$M = U \cdot b = 0{,}75 \cdot \pi \cdot 3 = 7{,}07\,\mathrm{m}^2$$

und für die Abdrehprobe eine Körneranzahl x von

$$x = M \cdot 250 = 7{,}07\,\mathrm{m}^2 \cdot 250\,\frac{\text{Körner}}{\mathrm{m}^2} = 1.767\,\text{Körnern.}$$

Lösung Aufgabe 2:

Bei gleichbleibendem Raddurchmesser ändert sich die Körneranzahl y für das neue Rad im selben Verhältnis, in dem sich auch die Radbreite ändert:

$$y = x \cdot \tfrac{4}{3} = 2.356\ \text{Körner}$$

(Alternativ kann natürlich auch die Rechnung aus Aufgabe 1 mit veränderter Breite durchgeführt werden.)

Lösung Aufgabe 3:

Große Anzahlen von Körnern lassen sich deutlich leichter wiegen als zählen. Hierfür gibt es die sogenannte Tausendkornmasse für die unterschiedlichen Getreidearten. Bei Weizen liegt sie je nach Weizensorte zwischen 40 und 65 g für 1.000 Körner.

17. Sämaschine – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin bestimmt die optimale Körnermenge zur Kontrolle einer Sämaschine per Abdrehprobe.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Elementare Eigenschaften und Formeln zu Kreis und Zylinder
4. Mögliche Schwierigkeiten: Zusammenhang zwischen Sämaschine und den geometrischen Objekten herstellen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten und didaktischer Kommentar:

▼ Zu Aufgabe 1 und Aufgabe 2: Eine Skizze der Sämaschine als Zylinder mit eingetragenem Durchmesser, Radius und Breite erleichtert die Vorstellung der Mantelfläche als einfach abgedrehte Aussaatfläche.

Quellen:

http://et.amazone.de/files/pdf/mg348.pdf [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

18. Verkauf von Weizen

Landwirtin Linda Jensen bringt ihr Getreide nach der Ernte zum Großhandel, wo es dann weiterverkauft wird. Sie wird vom Großhandel pro gelieferter Tonne Getreide, die sie liefert, bezahlt. Der Weizenpreis wird jede Woche neu bekanntgegeben. In der 47. KW 2019 lag der Ankaufspreis für Brotweizen zum Beispiel bei 158,90 € pro t.

Landwirtin Linda Jensen kippt ihren frisch geernteten Brotweizen in einer Lagerhalle aus. Da solche großen Getreidemengen schwierig zu wiegen sind, möchte sie abschätzen, wie viel sie für ihre aktuelle Weizenernte bekommt. Dafür misst sie den Umfang des Getreidekegels am Boden mit 20 m und mit Hilfe eines langen Messstabes die Mantellinie des Kornhaufens von der Spitze bis zum Boden mit 3,5 m.

18. Verkauf von Weizen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Helfen Sie Landwirtin Jensen bei der Gewichtsberechnung des Kornhaufens. 100 l Brotweizen wiegen 80 kg.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Preis, den Landwirtin Jensen für ihre Weizenernte in der 47. KW 2019 erzielen konnte.

18. Verkauf von Weizen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Kegel-Volumen: $V = G \cdot h$

Kegel-Grundfläche: $G = \pi \cdot r^2$

Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = 20\,\text{m} \Rightarrow r = \frac{20}{2 \cdot \pi} = 3{,}18\,\text{m}$

Mantellinie s (mit Pythagoras): $s^2 = r^2 + h^2$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(3{,}5\,\text{m})^2 - (3{,}18\,\text{m})^2} = 1{,}46\,\text{m}$$

Der Kegel hat damit ein Volumen von
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3{,}18\,\text{m})^2 \cdot 1{,}46\,\text{m}$$
$$= 15{,}44\,\text{m}^3$$
$$= 15.440\,\text{l}$$

und somit ein Gewicht von $\frac{15.440\,\text{l}}{100\,\text{l}} \cdot 80\,\text{kg} = 12.352\,\text{kg} = 12{,}352\,\text{t}$.

Lösung Aufgabe 2:

In der 47. KW des Jahres 2019 betrug der Brotweizenpreis 158,90 € pro t. Somit konnte Landwirtin Jensen zu diesem Zeitpunkt einen Preis von $12{,}352\,\text{t} \cdot 158{,}90\,\frac{€}{\text{t}} = 1.962{,}73\,€$ erzielen.

18. Verkauf von Weizen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin bestimmt Gewicht und Preis ihrer Weizenernte.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Elementare Begriffe und Rechnungen zu und an Kreis und Kegel
4. Mögliche Schwierigkeiten: Mantellinie mit Höhe verwechseln
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Zusatzaufgabe: Welchen Preis würde Landwirtin Jensen zum jetzigen Zeitpunkt mit ihrem Weizenkegel erzielen? Informieren Sie sich über die aktuellen Getreidekurse.

Quellen:

https://markt.agrarheute.com/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

19. Futtersilo

Landwirtin Linda Jensen erwirbt einen Hof, den sie als landwirtschaftlichen Betrieb weiterführen möchte. Mit dem Gelände hat sie auch einen zylindrischen Futtersilo erworben, den sie für die Lagerung von Rapsschrot als Kraftfutter (Gewicht von 560 kg/m^3) für ihre Kühe nutzen möchte.

Damit das Futter vollständig aus dem Silo entnommen werden kann, ist der untere Bereich des Silos kegelförmig (siehe Abbildung). Die Angaben zum Fassungsvermögen auf dem Silo sind verwittert und nicht mehr lesbar, sodass Landwirtin Jensen das Volumen selbst berechnen muss.

19. Futtersilo – Aufgaben

Aufgabe 1:

Landwirtin Jensen misst eine Silohöhe von 7 m und über den Abstand der unteren Stützpfosten einen Zylinderdurchmesser von 2 m. Der kegelförmige Trichter macht 3 m von der Gesamthöhe aus. Helfen Sie ihr bei der Berechnung des Silo-Fassungsvermögens.

Aufgabe 2:

Für ihre wirtschaftliche Planung kalkuliert Landwirtin Jensen eine komplette Silofüllung mit Rapsschrot. Wie teuer ist eine Füllung? Recherchieren Sie zunächst den aktuellen Preis für Rapsschrot.

19. Futtersilo – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Das Silo-Volumen V setzt sich aus dem Volumen V_Z des Zylinders (mit Höhe $h_z = 7\,\text{m} - 3\,\text{m} = 4\,\text{m}$ und Radius $r_Z = \frac{d}{2} = \frac{2\,\text{m}}{2} = 1\,\text{m}$) und dem Volumen V_K des kegelförmigen Trichters (mit Höhe $h_K = 3\,\text{m}$ und Radius $r_K = \frac{d}{2} = \frac{2\,\text{m}}{2} = 1\,\text{m}$) zusammen.
Mit den Volumen- und Kreisflächenformeln folgt mit G als kreisförmiger Grundfläche:

$$V_Z = G \cdot h_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h_Z = \pi \cdot (1\,\text{m})^2 \cdot 4\,\text{m} = 12{,}57\,\text{m}^3$$

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot {r_K}^2 \cdot h_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1\,\text{m})^2 \cdot 3\,\text{m} = 3{,}14\,\text{m}^3 \text{ und damit}$$

$$V = V_Z + V_K = 12{,}57\,\text{m}^3 + 3{,}14\,\text{m}^3 = 15{,}71\,\text{m}^3$$

Das Silo von Landwirtin Jensen hat ein Fassungsvermögen von $15{,}71\,\text{m}^3$, also etwa 15.710 l.

Lösung Aufgabe 2:

Damit die ganze Lieferung sicher ins Silo passt, sollte Landwirtin Jensen vor der Bestellung das geschätzte Fassungsvermögen abrunden (z. B. auf 15 m^3).

Preis für Rapsschrot im November 2019: $228{,}40\,\frac{€}{\text{t}}$

Gewicht einer Silofüllung: $15\,\text{m}^3 \cdot 560\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8.400\,\text{kg} = 8{,}4\,\text{t}$

Gesamtwert: $8{,}4\,\text{t} \cdot 228{,}40\,\frac{€}{\text{t}} = 1.918{,}56\,€$

19. Futtersilo – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin berechnet das Volumen eines Silos und den Preis für eine Silofüllung.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L1: Zahl, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Volumenberechnung von Zylinder und Kegel
4. Mögliche Schwierigkeiten: Seriöse Werte für aktuelle Preise von Rapsschrot in eigener Internet-Recherche finden
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten und didaktischer Kommentar:

▼ Ein vorgegebener Preis (zum Beispiel 240,60 €/t, Stand: Dezember 2019) erleichtert den zweiten Aufgabenteil.

Quellen:

https://markt.agrarheute.com/futtermittel-3/rapsschrot-17 [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

20. Silobau

Landwirtin Linda Jensen möchte ein neues Rundsilo zur Lagerung ihres Getreides bauen. Sie besitzt 100 ha Ackerfläche, auf der sie Weizen erntet. Durchschnittlich erntet Landwirtin Jensen 10 t pro Hektar. Weizen hat dabei eine Schüttdichte von ungefähr 800 kg pro Kubikmeter. Das neue Rundsilo darf aus baurechtlichen Gründen nicht höher als 15 m hoch sein.

20. Silobau – Aufgaben

Aufgabe 1:

Welchen Durchmesser muss das neue Silo haben, damit die gesamte Weizenernte hineinpasst? Helfen Sie Landwirtin Jensen bei der Berechnung.

20. Silobau – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Die gesamte Weizenernte von Landwirtin Jensen beträgt durchschnittlich $100\,\text{ha} \cdot 10\,\frac{\text{t}}{\text{ha}} = 1.000\,\text{t}$. Bei einer Weizen-Schüttdichte von $800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ hat die Ernte also ein Volumen von $\frac{1.000\,\text{t}}{0{,}8\,\frac{\text{t}}{\text{m}^3}} = 1.250\,\text{m}^3$, welches das neue Rundsilo mindestens fassen muss.

Das Rundsilo lässt sich geometrisch als Zylinder beschreiben. Mit der Volumenformel für Zylinder ($V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit Höhe h und Grundflächenradius r) folgt:

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}} = \sqrt{\frac{1.250\,\text{m}^3}{\pi \cdot 15\,\text{m}}} = 5{,}15\,\text{m},$$

wobei die maximal zulässige Silohöhe von 15 m angenommen wird. Damit bräuchte eine Rundsilo, welches die gesamte Weizenernte von Landwirtin Jensen fasst, einen Durchmesser von mindestens $2 \cdot 5{,}15\,\text{m} = 10{,}3\,\text{m}$.

20. Silobau – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin plant den Bau eines Rundsilos zur Lagerung der Weizenernte.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Volumen- und Grundflächenformel vom Zylinder
4. Mögliche Schwierigkeiten: Identifikation des Rundsilos als Zylinder
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

- ▼ Erklärung für „Schüttdichte“: 800 kg Weizen brauchen etwa 1 m^3 Platz.

Didaktischer Kommentar:

Bei der angegeben handelt es sich um eine durchschnittliche Ernte. In der Praxis soll das Silo von Landwirtin Jensen auch überdurchschnittliche Weizenernten fassen können. Daher bietet sich die Berechnung eines Silos mit beispielsweise 10 % größerem Volumen an ($V = 1{,}375\ \text{m}^3$, $d = 10{,}8\ \text{m}$). Bei weit überdurchschnittlichen Ernten können Teile des Weizens kurzfristig auf extern aufgeschütteten Haufen im Freien gelagert werden.

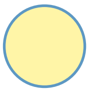
Quellen:

https://www.mollet.de/info/schuettgutdichte.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

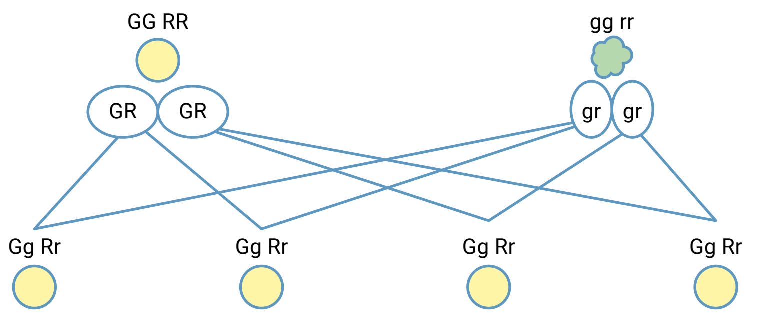
21. Erbsen züchten

Pflanzentechnologe Peter Thomas verfügt über zwei Sorten Erbsen, welche sich in Farbe und Form unterscheiden.



Die erste Sorte ist gelb (G) und rund (R).
Die zweite Sorte ist grün (g) und runzelig (r).

Dabei sind die Anlagen für G und R dominant und die für g und r rezessiv. Herr Thomas möchte Erbsen mit der Ausprägung „grün und rund“ züchten. Dafür kreuzt er beide Sorten Erbsen:



Im ersten Jahr erhält Herr Thomas nur Erbsen mit der Ausprägung „gelb und rund“. Im zweiten Jahr kreuzt er diese Erbsen miteinander.

21. Erbsen züchten – Aufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Ausprägungen „gelb und rund“, „gelb und runzelig“, „grün und rund“ und „grün und runzelig“ im zweiten Jahr auftreten.

Aufgabe 2:

Im dritten Jahr verwendet Herr Thomas die Erbsen mit der Ausprägung „grün und rund“ für die Zucht. Begründen Sie, weshalb die Erbsen in den Folgejahren nicht mehr gelb, aber noch runzelig werden können. Geben Sie den Anteil der verbliebenen Erbsen an, welche vom Typ (gg Rr) sind.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Erbsen im dritten Jahr runzelig werden*.

*Hinweis: Falls Sie bei Aufgabe 2 zu keinem Ergebnis gekommen sind, so rechnen Sie damit weiter, dass 50 % der verbliebenen Erbsen vom Typ (gg Rr) sind.

Aufgabe 4:

Herr Thomas möchte für seine Weiterzucht ausschließlich runde grüne Erbsen verwenden. Erklären Sie ihm, wie er herausfinden kann, welche Pflanzen vom Typ (gg RR) und welche vom Typ (gg Rr) sind.

Hilfekarten:

Dominant-rezessive Vererbung:
Bei der dominant-rezessiven Vererbung setzt sich die dominante Erbanlage gegenüber der rezessiven durch. Beispiel: Bei der Augenfarbe ist die Anlage für „braun“ (B) dominant und für „blau“ (b) rezessiv. Erhält ein Nachkomme von einem Elternteil die Erbanlage für braune Augen und vom anderen Elternteil für blaue, so folgt aus dem Genotyp Bb, dass die Augenfarbe braun wird.

Spaltungsregel bei der dominant-rezessiven Vererbung:
Es wird durchschnittlich $\frac{1}{4}$ der zweiten Nachkommengeneration reinerbig mit der rezessiven Erbanlage. Die anderen $\frac{3}{4}$ zeigen die Ausprägung der dominanten Erbanlage. Beispiel: Bei der Augenfarbe ist die Anlage für „braun“ (B) dominant und für „blau“ (b) rezessiv. Im Schnitt hat $\frac{1}{4}$ mit dem Genotyp bb blaue Augen. Die restlichen $\frac{3}{4}$ (Bb und BB) haben braune Augen.

	B	b
B	BB	Bb
b	Bb	bb

Zugehöriges Punnett-Quadrat

Unabhängigkeitsregel:
Werden zwei Merkmale betrachtet, so werden diese unabhängig voneinander vererbt. Beispiel: Bei der Augenfarbe ist die Erbanlage für „braun“ (B) dominant und für „blau“ (b) rezessiv, und beim Haar sind „gekräuseltes Haar“ (G) dominant und „glattes“ (g) rezessiv.

	BG	Bg	bG	bg
BG	BB GG	BB Gg	Bb GG	Bb Gb
Bg	BB Gg	BB gg	Bb Gg	Bb gg
bG	Bb GG	Bb Gg	bb GG	bb Gg
bg	Bb Gg	Bb gg	bb Gg	bb gg

Zugehöriges Punnett-Quadrat

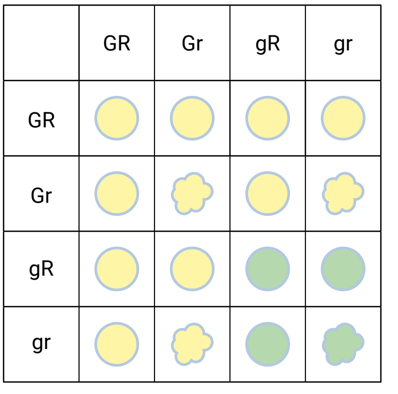
21. Erbsen züchten – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

9 : 3 : 3 : 1

(bzw. 900 g, 300 g, 300 g, 100 g)

Dies ergibt sich aus den Vererbungseigenschaften (dominant und rezessiv) und der Tabelle rechts.



Lösung Aufgabe 2:

Die übriggebliebenen Erbsen, die grün und rund sind, sind vom Typ (gg RR) oder (gg Rr). Die dominante Ausprägung „gelb" (G) kann nicht mehr vorkommen, da die Erbse sonst gelb wäre. Die rezessive Ausprägung „runzelig" (r) dagegen kann noch in den Erbsen vorhanden sein, ohne zum Vorschein zu kommen. Es sind $\frac{2}{3}$ der grünen und runden Erbsen vom Typ (gg Rr) (bzw. 200 g).

Lösung Aufgabe 3:

Wird eine Erbse vom Typ (gg RR) mit einer vom Typ (gg Rr) gekreuzt, so werden die Erbsen der nachfolgenden Generation rund. Werden Erbsen vom Typ (gg Rr) mit sich selbst gekreuzt, entstehen zu $\frac{1}{4}$ runzelige Erbsen (Spaltungsregel beim dominant-rezessiven Erbgang). Die Wahrscheinlichkeit ist somit insgesamt:

	RR	Rr	Rr
RR	0	0	0
Rr	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Rr	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4}}{9} = \frac{1}{9}$$

* Hinweis: Wird mit 50 % aus der Fußnote weitergerechnet, ergibt sich:

$$\frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

	RR	Rr
RR	0	0
Rr	0	$\frac{1}{4}$

Lösung Aufgabe 4:

Man kreuzt die zu untersuchenden Erbsen mit grünen runzeligen Erbsen. Entstehen bei dieser Kreuzung nur runde Erbsen, so war die zu untersuchende Erbse vom Typ (gg RR). Entstehen jedoch auch runzelige Erbsen, so war sie vom Typ (gg Rr).

21. Erbsen züchten – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Pflanzentechnologe, der Saatzucht betreibt, möchte eine bestimmte Sorte Erbsen züchten.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L5: Daten und Zufall
3. Vorwissen: Anteilsbildung, Baumdiagramme, elementare kombinatorische Regeln
4. Mögliche Schwierigkeiten: Mendelsche Regeln aus der Biologie unbekannt
5. Angesprochenes Berufsfeld: Pflanzentechnolog*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie (Mendelsche Regeln)

Differenzierungsmöglichkeiten und didaktischer Kommentar:

▼ Da sich die Aufgaben am einfachsten durch Zeichnen des Punnett-Quadrates lösen lassen, kann diese Hilfestellung zu Beginn der Aufgabe 1 gegeben werden, sofern das Punnett-Quadrat im Mathe- oder Biologieunterricht eingeführt worden ist (Verwendung der Hilfekarten).

▼ Zu Aufgabe 1: Herr Thomas erhält 1,6 kg Erbsen. Wie viel Gramm davon sind „gelb und rund“, „gelb und runzelig“, „grün und rund“ und „grün und runzelig“?

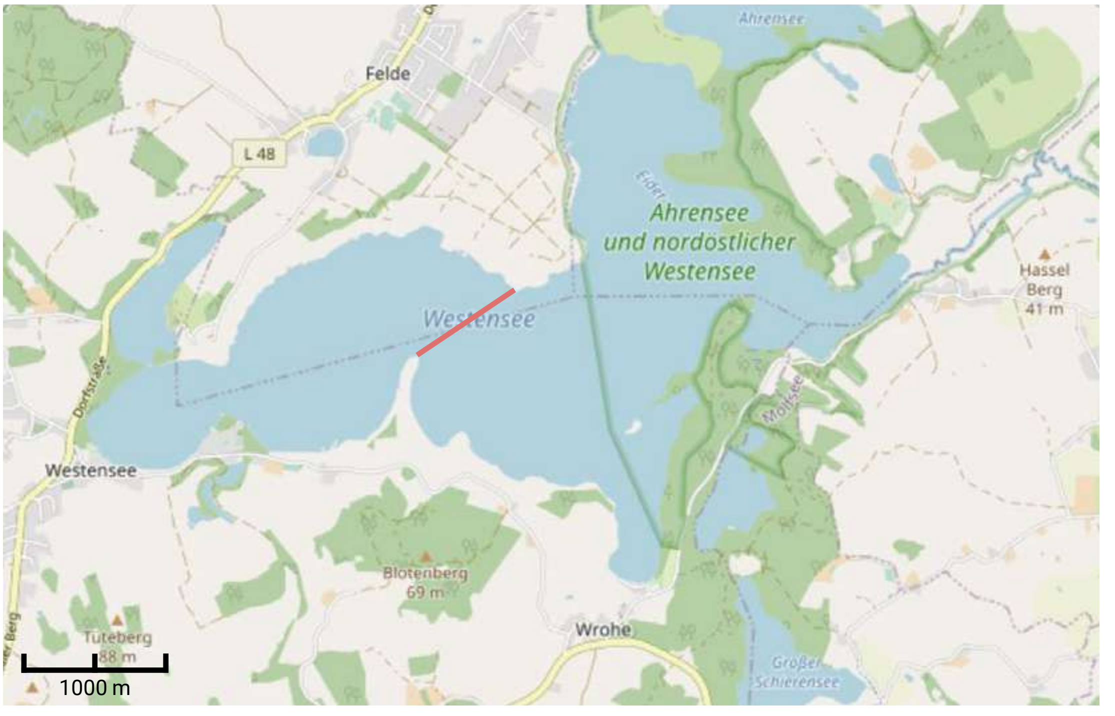
▼ Begründen Sie, weshalb die Erbsen nachfolgender Generationen nicht mehr gelb, aber noch runzelig werden können. Wie viel Gramm der verbliebenen Erbsen sind vom Typ (gg Rr)?

Quellen:

Birbaumer, N., Schmidt, R. F. (2010): *Biologische Psychologie*, 7. Auflage. Heidelberg: Springer, S. 573–574.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

22. Fischzucht



Der Westensee liegt im gleichnamigen Naturpark und ist einer der landschaftlich reizvollsten Seen in Schleswig-Holstein. Er befindet sich zwischen Kiel und Rendsburg südlich vom Nord-Ostsee-Kanal. Der westliche Teil des Sees wird als Aquakultur für die Fischzucht genutzt.

22. Fischzucht – Aufgaben

Aufgabe 1:

Schätzen Sie die Größe des Westensees möglichst genau ab, verwenden Sie dazu den im Bild enthaltenden Maßstab. Geben Sie den prozentualen Anteil des Sees an, der für die Fischzucht genutzt wird (die Gebietsgrenze wird durch die rote Linie markiert).

Aufgabe 2:

Pro Hektar (ha) bringt die Fischzucht jedes Jahr ca. 400 ausgewachsene Karpfen hervor. Die Fischwirt*innen verkaufen die Karpfen für 3,60 € pro kg. Berechnen Sie den Gewinn, den die Fischwirt*innen erzielen, wenn sie alle Karpfen verkaufen und sich die Kosten für die Aufzucht auf 63 % des Verkaufspreises pro Fisch belaufen. Nehmen Sie ein durchschnittliches Gewicht der Karpfen von 1,9 kg an.

Aufgabe 3:

Die Fischzucht am Westensee leidet momentan unter Kormoranbefall. Diese Vögel sind ein großer Feind der Fischwirtschaft und stehen unter Artenschutz, sodass man sie nicht vertreiben darf. Einige Kormoran-Populationen sind Zugvögel. Aus der Erfahrung der letzten Jahre fressen 200 Kormorane etwa 100 kg Fisch pro Tag, davon sind ungefähr 80 % Karpfen. Ein Fischwirt hat am Morgen versucht, die Kormorane möglichst genau zu zählen und kam auf 320 Kormorane. Nach 3 Wochen ziehen sie weiter. Berechnen Sie den entstandenen finanziellen Schaden für die Fischwirt*innen am Westensee.

22. Fischzucht – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Westensee hat eine Fläche von etwa 716,38 ha. Die Aquakultur wird dabei auf einer Fläche von etwa 261,88 ha betrieben (im Nordwesten, in der Grafik dargestellt durch die rote Linie), womit ungefähr 36,56 % des Sees für die Fischzucht genutzt werden.

Ein möglicher Ansatz zur Abschätzung der Flächeninhalte ist die Einteilung des Sees in Quadrate mit Hilfe des angegebenen Maßstabes. Anschließend bietet es sich an, die Quadrate weiter zu verfeinern.

Lösung Aufgabe 2:

Die Kosten für die Aufzucht liegen bei 63 % des Verkaufspreises, sodass 37 % des Verkaufspreises den Gewinn ausmachen.

Größe der Karpfenpopulation:	$261{,}88\,\text{ha} \cdot 400\,\frac{\text{Karpfen}}{\text{ha}} = 104.752$ Karpfen
Gesamtgewicht:	$104.752 \cdot 1{,}9\,\text{kg} = 199.028{,}80\,\text{kg}$
Verkaufspreis:	$199.028{,}80\,\text{kg} \cdot 3{,}60\,\frac{€}{\text{kg}} = 716.503{,}68\,€$
Gewinn:	$0{,}37 \cdot 716.503{,}68\,, € = 265.106{,}36\,€$

Für andere Schätzungen in Aufgabe 1 ergibt sich entsprechend ein leicht abweichender Wert.

Lösung Aufgabe 3:

200 Kormorane fressen zusammen etwa 100 kg Fisch pro Tag davon etwa 80 % Karpfen, also 80 kg. 320 Kormorane fressen entsprechend $80\,\text{kg} \cdot \frac{320}{200} = 128\,\text{kg}$.
Gesamtgewicht in 3 Wochen: $21\,\text{Tage} \cdot 128\,\frac{\text{kg}}{\text{Tag}} = 2.688\,\text{kg}$
Entstandener Schaden für die Fischwirt*innen: $2.688\,\text{kg} \cdot 3{,}60\,\frac{€}{\text{kg}} = 9.676{,}80\,€$

22. Fischzucht – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Fischwirt*innen berechnen Flächen und Gewinn einer Aquakultur.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L2: Messen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Flächenberechnung, Aufstellen einer Gleichung, Umrechnung ha – km, Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: Abschätzung der Größe des Sees
5. Angesprochenes Berufsfeld: Fischwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie, Erdkunde, Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 2: Vorgabe der tatsächlich als Aquakultur genutzten Fläche des Westensees von 261,88 ha.

Didaktischer Kommentar:

Beim Vergleichen von Aufgabe 1 werden sehr unterschiedliche Ergebnisse auftreten. Das Einzeichnen von bekannten geometrischen Figuren zur Flächenberechnung des Sees kann für eine genauere Abschätzung empfohlen werden.

Quellen:

http://www.beauty-carps.de [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.deutschlandfunk.de/mecklenburg-vorpommern-kormorane-bedrohen-fischzuechter.697.de.html?dram:article_id=319299 [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Stefan Schneider, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

23. Heuballen

Pferdewirt York Schmersen hält 25 Pferde, welche jeweils ungefähr 3 t Heu pro Jahr fressen. Das Heu produziert er entweder selbst in Form von Rundballen (1,20 m Breite und 1,40 m Durchmesser) oder er lässt sich von einem Landwirt Rundballen in der gleichen Größe anliefern. 1 m^3 gepresstes Heu wiegt dabei ungefähr 560 kg.

23. Heuballen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Anzahl der Rundballen, die Pferdewirt Schmersen jährlich produzieren oder kaufen muss, damit alle Pferde versorgt sind.

Aufgabe 2:

Ein halbes Jahr nach der Heuernte bekommt Pferdewirt Schmersen noch 2 Pferde dazu. Er muss noch mehr Ballen dazukaufen. Die Ballen, die er kaufen möchte, wurden allerdings mit einer anderen Maschine hergestellt und sind daher kleiner. Sie haben einen Durchmesser von 75 cm und sind 1 m breit. Bestimmen Sie die Anzahl der Rundballen, die er noch dazu kaufen muss, um die beiden neuen Pferde bis zur nächsten Heuernte in einem halben Jahr zu versorgen.

23. Heuballen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Die Pferde von Pferdewirt Schmersen fressen mit 10 % Sicherheitszuschlag pro Jahr zusammen $25 \cdot 3\,\text{t} \cdot 1{,}1 = 82{,}5\,\text{t}$ Heu, das bedeutet ein Volumen von $\frac{82{,}5\,\text{t}}{560\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{82.500\,\text{kg}}{560\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 147{,}32\,\text{m}^3$.

Ein Heuballen hat die geometrische Form eines Zylinders und bei einer Breite von $b = 1{,}2\,\text{m}$ und einem Durchmesser der Grundfläche G von $d = 1{,}4\,\text{m}$ ein Volumen von

$$V = G \cdot b = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot b = \pi \cdot (0{,}7\,\text{m})^2 \cdot 1{,}2\,\text{m} = 1{,}85\,\text{m}^3$$

Pferdewirt Schmersen benötigt für seine Pferde insgesamt $\frac{147{,}32\,\text{m}^3}{1{,}85\,\text{m}^3} = 79{,}63$, also 80 Heuballen der angegebenen Größe.

Lösung Aufgabe 2:

Die beiden neuen Pferde fressen mit 10 % Sicherheitszuschlag in einem halben Jahr zusammen $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\,\text{t} \cdot 1{,}1 = 3{,}3\,\text{t}$ Heu, was einem Volumen von $\frac{3{,}3\,\text{t}}{560\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{3.300\,\text{kg}}{560\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 5{,}89\,\text{m}^3$ entspricht.

Ein kleiner Heuballen hat bei einer Breite von $b = 1\,\text{m}$ und einem Durchmesser der Grundfläche G von $d = 0{,}75\,\text{m}$ ein Volumen von

$$V = G \cdot b = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot b = \pi \cdot (0{,}375\,\text{m})^2 \cdot 1\,\text{m} = 0{,}44\,\text{m}^3$$

Pferdewirt Schmersen benötigt für die beiden neuen Pferde noch $\frac{5{,}89\,\text{m}^3}{0{,}44\,\text{m}^3} = 13{,}39$, also 14 zusätzliche kleine Heuballen, damit auch diese bis zur nächsten Heuernte versorgt sind.

23. Heuballen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Pferdewirt plant die Versorgung seiner Pferde mit Heu.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L2: Messen
3. Vorwissen: Volumenberechnung eines Zylinders
4. Mögliche Schwierigkeiten: Verwechslung von Breite und Höhe des (liegenden) Heuballen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Pferdewirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten und didaktischer Kommentar:

▼ Zur Erleichterung der Aufgabe können auch die Gewichte der Heuballen angegeben werden (1.036 kg in Aufgabe 1 und 246,4 kg in Aufgabe 2).

Quellen:

https://www.dr-susanne-weyrauch.de/gesundheit/allgemeine-grundlagen/heu-die-basis-guter-pferdefuetterung [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

24. Biogasanlage

Eine Biogasanlage dient der Erzeugung von Biogas durch Vergärung von Biomasse. Landwirt René May möchte gerne eine Biogasanlage bauen. Das optimale Volumen des Gärbehälters einer Biogasanlage, auch Fermenter genannt, ergibt sich aus der Anzahl der Nutztiere sowie der Anbaufläche für Mais und Gras. Herr May möchte mit den Stadtwerken kooperieren und sein Biogas über ein Blockheizkraftwerk in das städtische Gasnetz einspeisen lassen.

Dafür fördern die Stadtwerke den Bau seiner Anlage; allerdings nur, wenn sie ein Nutzvolumen von mindestens 2.000 m^3 aufweist. Als Nutzvolumen wird dabei der zylinderförmige Teil des Fermenters bezeichnet, indem sich die Biomasse befindet. Das Nutzvolumen befindet sich im unteren Teil des Fermenters (siehe Abbildung). Über dem Nutzvolumen befindet sich das entstandene Biogas. Dieser obere Teil des Fermenters wird als Gasspeicher bezeichnet. Der Gasspeicher kann entweder die Form eines Kegels oder die annähernde Form einer Halbkugel haben und ist aus Folie gefertigt.

Der Platz auf dem Hof von Herrn May ist begrenzt. Ein hier platzierter Fermenter kann maximal einen Durchmesser von 20 m haben.

24. Biogasanlage – Aufgaben

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Höhe des Fermenters bei einem Nutzvolumen von 2.000 m^3.

Aufgabe 2:
Herr May überlegt, ob er für einen halbkugelförmigen oder für einen kegelförmigen Gasspeicher mehr Folie benötigt, wenn beide das gleiche Volumen haben. Helfen Sie ihm.

24. Biogasanlage – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Maximaler Durchmesser des Fermenters: $20\,\text{m}$

Höhe des Nutzvolumens: $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$\Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{2.000\,\text{m}^3}{\pi \cdot (10\,\text{m})^2} = \frac{2.000\,\text{m}^3}{\pi \cdot 100\,\text{m}^2} = 6{,}37\,\text{m}$$

Ein halbkugelförmiger Gasspeicher hätte entsprechend einen Radius von ebenfalls $10\,\text{m}$ und damit auch eine Höhe von $10\,\text{m}$, was eine Gesamthöhe des Fermenters von $16,37\,\text{m}$ bedeutet.

Für die Berechnung der Höhe eines kegelförmigen Zylinders reicht der Radius nicht aus.

Lösung Aufgabe 2:

Der halbkugelförmige Gasspeicher hat ein Volumen V_G von

$$V_G = \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot (10\,\text{m})^3 = 2.094{,}4\,\text{m}^3$$

und eine Oberfläche A_O von

$$A_O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (10\,\text{m})^2 = 628{,}32\,\text{m}^2.$$

Aus der Volumenformel für den Kegel $\left(V = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h\right)$ ergibt sich eine Kegelhöhe h von

$$h = \frac{V}{\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{2.094{,}4\,\text{m}^3}{\tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (10\,\text{m})^2} = 20\,\text{m}$$

und daraus eine Mantelfläche A_M von

$$A_M = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = 702{,}48\,\text{m}^2.$$

Bewertungskriterien:
- Die Mantelfläche des Kegels ist größer als die der Halbkugel (höhere Folienkosten).
- Der kegelförmige Gasspeicher ist doppelt so hoch wie der halbkugelförmige Gasspeicher (Probleme bei der Gasentnahme).

24. Biogasanlage – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt plant die Anschaffung einer Biogasanlage.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Elementare Formeln der einfachen räumlichen Geometrie
4. Mögliche Schwierigkeiten: Anwendung der Volumen- und Oberflächenformeln von Halbkugel und Kegel
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Volumen- und Oberflächenformeln für Halbkugel und Kegel vorgeben.

Quellen:

https://www.biogas.org/edcom/webfvb.nsf/id/de-so-funktioniert-eine-biogasanlage
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.haz.de/Nachrichten/Wirtschaft/Niedersachsen/Bauern-speisen-Biogas-in-Pipeline-der-Stadtwerke-Hannover-ein [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

25. Hühnererkrankungen

Gerhard Müller hat einen Hühnerzuchtbetrieb mit derzeit 32.000 Hühnern. Ein Huhn hat sich mit einem sehr ansteckenden Virus infiziert. Der Amtstierarzt hatte kürzlich über den Virus informiert, sodass der Landwirt den Virus erkennen konnte und weiß, dass bei gewöhnlicher Haltung jedes infizierte Huhn innerhalb einer Stunde im Schnitt ein weiteres Huhn ansteckt.

25. Hühnererkrankungen – Aufgaben

Aufgabe 1:
Fertigen Sie eine Wertetabelle an, in der die Anzahl der infizierten Hühner in den ersten 10 Stunden angegeben wird. Stellen Sie den Verlauf als Funktionsgraph in einem Koordinatensystem dar.

Aufgabe 2:
Was für eine Art von Wachstum liegt hier vor? Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die voraussichtliche Anzahl der Tiere, die nach 12 Stunden infiziert sind.

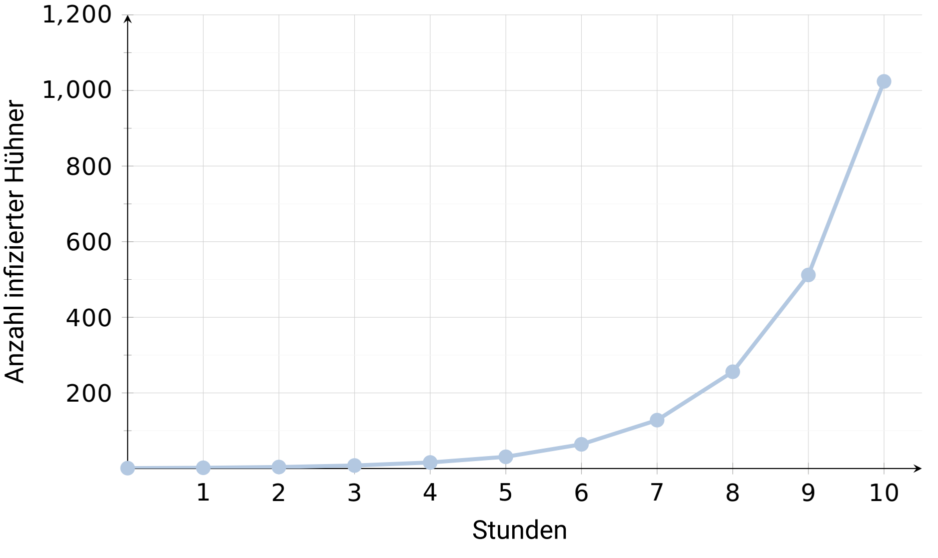
Aufgabe 4:
Wann ist die Hälfte der Tiere, wann sind alle Tiere infiziert, wenn die Prognose des Amtstierarztes stimmt?

Aufgabe 5:
Landwirt Müller möchte die Verbreitung des Virus möglichst frühzeitig unterbinden, um seine Tiere zu schützen. Schlagen Sie ihm Maßnahmen vor, die er ergreifen kann, um der Infektion einer Vielzahl an Hühnern vorzubeugen.

25. Hühnererkrankungen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl infizierte Hühner	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024



Lösung Aufgabe 2:
Es handelt sich um ein exponentielles Wachstum der Form $f(t) = f(0) \cdot a^t$ mit Startwert $f(0)$, Wachstumsfaktor a und t in Stunden. Aus der Wertetabelle ergeben sich $f(0) = 1$ und $a = 2$, damit folgt $f(t) = 2^t$.

Lösung Aufgabe 3:
Nach 12 Stunden sind $f(12) = 2^{12} = 4.096$ Tiere infiziert.

Lösung Aufgabe 4:
Nach $t = \frac{\ln(0{,}5 \cdot 32.000)}{\ln(2)} = 13{,}97$ Stunden, also knapp 14 Stunden, ist die Hälfte der Tiere und nach $t = \frac{\ln(32.000)}{\ln(2)} = 14{,}97$, also knapp 15 Stunden, sind alle Tiere infiziert.

Lösung Aufgabe 5:
Bewertungskriterien:
- Trennung infizierter und nicht-infizierter Hühner mittels Quarantäne-Bereich
- Medikamentenvergabe über das Futter
- Notschlachtung infizierter bzw. teilweise auch aller Hühner vorgeschrieben (Meldepflicht)

25. Hühnererkrankungen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt untersucht und bekämpft die Ausbreitung einer Infektion seiner Hühner.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen,
   K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L1: Zahl L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Lineare Gleichungssysteme
4. Mögliche Schwierigkeiten: Aufstellen einer Funktionsgleichung
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Aufgabe 1 und Aufgabe 2 weglassen.

Quellen:

http://www.tierseucheninfo.niedersachsen.de/anzeigepflichtige_tierseuchen/gefluegelseuchen/gefluegelpest/gefluegelpest-21687.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Inken Saggau, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

26. Ackerbau

Landwirt Stefan Novak muss seine vorhandene Ackerfläche bestmöglich nutzen. Er besitzt einen kleinen Betrieb, auf dem er auf 5 ha Spargel und hochwertige Biokartoffeln anbaut. 1 kg Kartoffeln kann er für 1,60 € verkaufen, während er für 1 kg tagesfrischen Spargel 12,00 € erzielt.

In der Region kann Landwirt Novak erfahrungsgemäß maximal 135 t Kartoffeln und 24 t Spargel verkaufen. Pro ha Kartoffelfeld lassen sich 30 t ernten, während es beim Spargel nur 8 t pro ha sind.

Für die Bearbeitung der Felder sowie der Ernte werden pro ha Kartoffeln 700 Arbeitskraftstunden (AKH) benötigt, bei Spargel sind es 2.100 AKH pro ha. Die Anzahl der Arbeitskräfte von Herrn Novak ist begrenzt, sodass maximal etwa 7.350 AKH aufgewendet werden können.

Von der Ernte abgesehen belaufen sich die Gesamtkosten für die Beackerung eines ha Kartoffeln auf 500 €, die Beackerung eines ha Spargel kostet 3.000 €. Hinzu kommt, dass Herr Novak für jede AKH den Mindestlohn von 9,35 € zahlt. Dabei fallen für ihn aber noch Lohnnebenkosten in Höhe von 22,375 % des Mindestlohns an.

26. Ackerbau – Aufgaben

Aufgabe 1:

Sei x die Kartoffelanbaufläche in Hektar und y die Spargelanbaufläche. Stellen Sie die Zusammenhänge von x und y in Form passender Ungleichungen dar (Tabellen-Spalte „Ungleichung").

		Ungleichung	Umgeformte Ungleichung
I	Minimaler Wert für x:		
	Minimaler Wert für y:		
II	Aufteilung der Gesamtfläche:		
III	Begrenzung der Fläche für Kartoffeln:		
IV	Begrenzung der Fläche für Spargel:		
V	Aufteilung der Arbeitskraftstunden:		

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie die in Aufgabe 1 bestimmten Bedingungen in einem Koordinatensystem und markieren Sie den Bereich aller Punkte, auf die alle genannten Bedingungen noch zutreffen. Diesen Bereich nennt man auch Zulässigkeitsbereich.
Formen Sie dazu zunächst die Ungleichungen in die Form $y \geq \ldots$ oder $y \leq \ldots$ um (Tabellen-Spalte „Umgeformte Ungleichung").

Aufgabe 3:

Berechnen Sie, welchen Gewinn (G) Landwirt Novak abhängig von seiner Wahl für x und y erzielt. Formen Sie anschließend Ihren mathematischen Ausdruck nach $y = f(x)$ um.

Aufgabe 4:

Eine optimale Wahl für x und y liegt immer an einer der Ecken des Zulässigkeitsbereichs vor. Graphisch kann man die „optimale Ecke" ermitteln, indem man den Graphen von f parallel auf jede Ecke verschiebt und prüft, bei welcher Ecke der y-Achsenabschnitt am größten ist. Bestimmen Sie die optimale Ecke. Wie hoch ist der Gewinn, den Landwirt Novak maximal erzielen kann?

Hilfekarten:

Beispiel zu Aufgabe 2:

$x + y \leq 5 \quad |-x$

$y \leq 5 - x$

$2y \leq 5 - x \quad |:2$

$y \leq \frac{5-x}{2}$

Zu Aufgabe 4:

Wenn Sie in Aufgabe 1 zu keiner Lösung gekommen sind, rechnen Sie mit den folgenden Zusammenhängen:

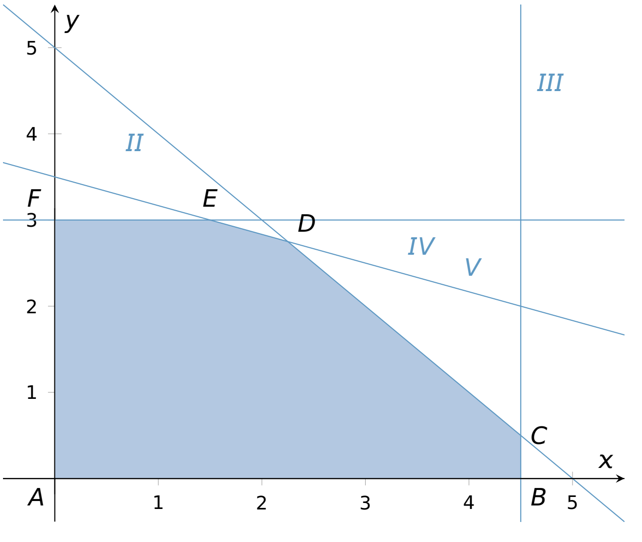
I	Minimaler Wert für x und y:	$x \geq 0\,, y \geq 0$
II	Aufteilung der Gesamtfläche:	$x + y \leq 5 \Leftrightarrow y \leq -x + 5$
III	Begrenzung der Fläche für Kartoffeln:	$x \leq \frac{135\,\mathrm{t}}{30\,\mathrm{t}} = 4{,}5$
IV	Begrenzung der Fläche für Spargel:	$y \leq \frac{24\,\mathrm{t}}{8.000\,\mathrm{kg}} = \frac{24.000\,\mathrm{kg}}{8.000\,\mathrm{kg}} = 3$
V	Aufteilung der Arbeitskraftstunden:	$700x + 2.100y \leq 7.350 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 3{,}5$

26. Ackerbau – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

I	Minimaler Wert für x und y:	$x \geq 0\,,\, y \geq 0$
II	Aufteilung der Gesamtfläche:	$x + y \leq 5 \Leftrightarrow y \leq -x + 5$
III	Begrenzung der Fläche für Kartoffeln:	$x \leq \frac{135\,\text{t}}{30\,\text{t}} = 4{,}5$
IV	Begrenzung der Fläche für Spargel:	$y \leq \frac{24\,\text{t}}{8.000\,\text{kg}} = \frac{24.000\,\text{kg}}{8.000\,\text{kg}} = 3$
V	Aufteilung der Arbeitskraftstunden:	$700x + 2.100y \leq 7.350 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 3{,}5$

Lösung Aufgabe 2:



Lösung Aufgabe 3:

Gewinn = Einnahmen – Kosten

Einnahmen: $E = 30.000 \cdot 1{,}6x + 8.000 \cdot 12y = 48.000x + 96.000y$

Personalkosten: $K_P = (700x + 2.100y) \cdot 9{,}35 \cdot 1{,}22375$

Gesamtkosten: $K_G = 500x + 3.000y + K_P$

Gewinn: $G = 48.000x + 96.000y - (8.509x + 27.028y) = 39.491x + 68.972y$

Umformen nach y: $y = f(x) = -\dfrac{39.491x}{68.972} + \dfrac{G}{68.972} \approx -0{,}57x + \dfrac{G}{68.972}$

Lösung Aufgabe 4:

Durch Verschiebung des Graphen der Funktion f erhält man, dass die optimale Ecke am Punkt D vorliegt, an dem sich die Begrenzungsgeraden schneiden, die durch die Bedingungen II und V gegeben sind.

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+5 & = & -\frac{1}{3}x+3{,}5 \\ \Leftrightarrow & -\frac{2}{3}x & = & -1{,}5 \\ \Rightarrow & x & = & 2{,}25 \\ x \cap y: & y & = & -2{,}25+5=2{,}75 \\ \text{Gewinn:} & G & = & 278.128{,}26\,€ \end{array}$$

26. Ackerbau – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt plant systematisch seinen Ackerbau, um auf diese Weise möglichst viel Gewinn zu erzielen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Aufstellung von Funktionsgleichungen, Berechnung von Schnittpunkten und Zeichnen linearer Funktionen, Ungleichungen
4. Mögliche Schwierigkeiten: Aufstellen der Ungleichungen und Zusammenhang zwischen Ungleichungen und ihrer graphischen Darstellung
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 2 und Aufgabe 4: Verwendung der Hilfekarten

▲ Beginn erst bei Aufgabe 4 ohne die Frage nach der „optimalen Ecke“

▲ Zusatzaufgaben:

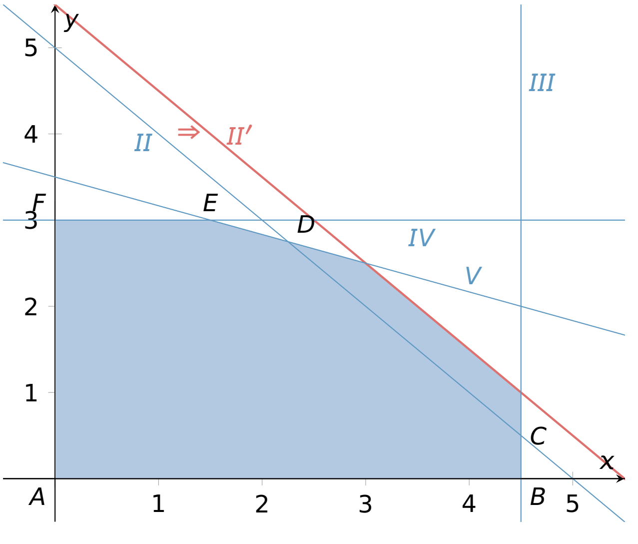
Im nächsten Jahr hat Landwirt Novak etwas Geld ansparen können und kauft 0,5 ha zusätzliches Land, welches ebenfalls dem Anbau von Kartoffeln und Spargel dienen soll.

Aufgabe 5:

Ergänzen Sie Ihre Skizze, indem Sie (evtl. mit einer anderen Farbe) kennzeichnen, wie der neue Zulässigkeitsbereich aussieht.

Lösung Aufgabe 5:

Lediglich Einschränkung II verändert sich durch den Zukauf der Fläche. Der Zulässigkeitsbereich wird dadurch vergrößert.



<u>Aufgabe 6</u>:
Um wie viel Prozent wird der Gewinn jetzt gesteigert?

<u>Lösung Aufgabe 6</u>:
Bedingung II ändert sich zu

$$\text{II'}: y \leq -x + 5{,}5.$$

Die optimale Ecke liegt weiter am Schnittpunkt der Geraden, die durch die Bedingungen II' und V gegeben sind. Zu bestimmen ist also die Lösung der Gleichung

$$-x + 5{,}5 = -\frac{1}{3}x + 3{,}5.$$

Als Lösung erhält man analog zu Aufgabe 4 die Werte $x = 3$ und $y = 2{,}5$ und damit einen Gewinn von $290.900{,}86$ €, was eine Gewinnsteigerung von gut $4{,}5$ % bedeutet.

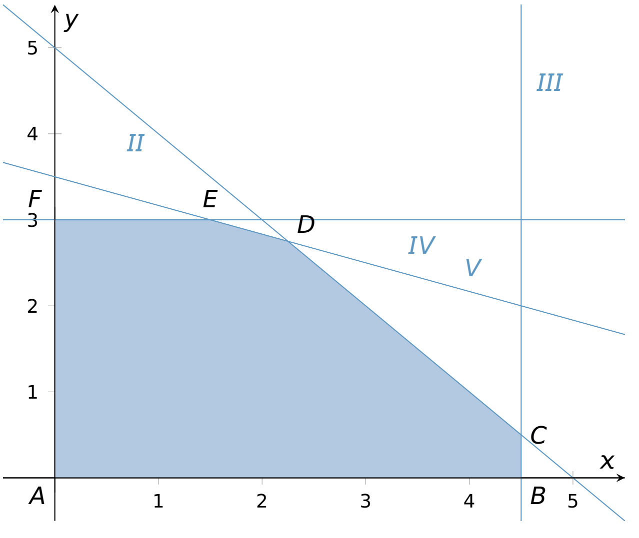
Quellen:

http://www.etl.de/aktuelle-themen/der-flaechendeckende-mindestlohn-kommt
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Tobias Sildatke, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

27. Ackerplanung

Landwirt Stefan Novak baut auf 5 ha Acker hochwertige Biokartoffeln sowie tagesfrischen Spargel an, welche er in der Region verkauft. x stehe dabei für seine Kartoffelanbaufläche und y für die Spargelanbaufläche in ha. Er muss verschiedene Einschränkungen beachten, kann aber selbst entscheiden, wie viel Kartoffeln oder Spargel er anbaut. Die folgende Grafik stellt die Einschränkungen für x und y sowohl mathematisch als auch graphisch dar.



I	Minimaler Wert für x und y:	$x \geq 0\,, y \geq 0$
II	Aufteilung der Gesamtfläche:	$x + y \leq 5 \Leftrightarrow y \leq -x + 5$
III	Begrenzung der Fläche für Kartoffeln:	$x \leq \frac{135\,\text{t}}{30\,\text{t}} = 4{,}5$
IV	Begrenzung der Fläche für Spargel:	$y \leq \frac{24\,\text{t}}{8.000\,\text{kg}} = \frac{24.000\,\text{kg}}{8.000\,\text{kg}} = 3$
V	Aufteilung der Arbeitskraftstunden:	$700x + 2.100y \leq 7.350 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 3{,}5$

27. Ackerplanung – Aufgaben

Aufgabe 1:

a) Formulieren Sie die Einschränkung $y \leq 3$ in Worten.
b) Formulieren Sie die Einschränkung $y \leq -x + 5$ in Worten.
c) Erklären Sie: Alle Punkte (x, y), die im grauen Bereich (Zulässigkeitsbereich) liegen, stehen für eine mögliche Anbauentscheidung. Erklären Sie dies für den Punkt (3; 1,5).

Aufgabe 2:

Entscheidend bei der Ausnutzung des Ackers ist, welcher Gewinn abhängig von der Nutzung entsteht. Folgende Angaben sind für die Berechnung des Gewinns relevant:

1 kg Kartoffeln kann er für 1,60 € verkaufen, während er für 1 kg tagesfrischen Spargel 12,00 € erzielt. In der Region kann er erfahrungsgemäß maximal 135 t Kartoffeln und 24 t Spargel verkaufen. Pro ha Kartoffelfeld lassen sich 30 t ernten, während es beim Spargel nur 8 t pro ha sind.

Für die Bearbeitung der Felder sowie der Ernte werden für 1 ha Kartoffeln 700 Arbeitskraftstunden (AKH) benötigt, bei Spargel sind es 2.100 AKH pro ha. Die Anzahl der Arbeitskräfte von Herrn Novak ist begrenzt, sodass maximal etwa 7.350 AKH aufgewendet werden können.

Die Kosten für die Beackerung eines ha Kartoffeln belaufen sich auf 500 €, die Beackerung eines ha Spargel kostet 3.000 €. Hinzu kommt, dass Herr Novak für jede AKH den Mindestlohn von 9,35 € zahlt. Dabei fallen für ihn aber noch Lohnnebenkosten in Höhe von 22,375 % des Mindestlohns an.

Da man bei so vielen Bedingungen leicht die Übersicht verlieren kann, nutzt Landwirt Novak eine Excel-Tabelle. Für x und y kann er Werte für die Kartoffel- bzw. Spargelanbaufläche eingeben. Die Excel-Tabelle zeigt an, ob diese Wahl möglich ist, und den Gewinn, der dabei entsteht.

Öffnen Sie die zu dieser Aufgabe zugehörige Excel-Tabelle. Prüfen Sie die oben aufgeführten Werte und probieren Sie einige Kombinationen für x und y aus. Versuchen Sie zu erreichen, dass Ihre Wahl für x und y sowohl möglich ist, als auch möglichst viel Gewinn ergibt.

Aufgabe 3:

Landwirt Novak vermutet einen Fehler in der Excel-Tabelle. Berechnen Sie, welchen Gewinn (G) er abhängig von seiner Wahl für x und y erzielt, um die Angaben der Excel-Tabelle überprüfen zu können. Formen Sie anschließend Ihren mathematischen Ausdruck nach $y = f(x)$ um.
(Zur Kontrolle: $y = -0{,}57x + \frac{G}{70{,}278}$)

Aufgabe 4:

Eine optimale Wahl für x und y liegt immer an einer der Ecken des Zulässigkeitsbereichs vor. Grafisch kann man die „optimale Ecke" ermitteln, indem man den Graphen von f parallel auf jede Ecke verschiebt und prüft, bei welcher Ecke der y-Achsenabschnitt am größten ist.

Bestimmen Sie die optimale Ecke. Wie hoch ist der Gewinn, den Landwirt Novak maximal erzielen kann?

27. Ackerplanung – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

a) Die Spargelanbaufläche darf maximal 3 ha betragen.
b) Die Anbaufläche für Spargel und Kartoffeln darf zusammen nicht größer als 5 ha sein. Daher nimmt der Spargel maximal die nach dem Kartoffelanbau noch verfügbare Fläche ein (nach Teil a) aber höchstens 3 ha).
c) Alle Punkte im Zulässigkeitsbereich erfüllen die Einschränkungen. Der Punkt $(3; 1{,}5)$ beschreibt, dass Landwirt Novak 3 ha Kartoffeln und 1,5 ha Kartoffeln anbaut.

Lösung Aufgabe 3:

Gewinn = Einnahmen — Kosten

Einnahmen: $E = 30.000 \cdot 1{,}6x + 8.000 \cdot 12y = 48.000x + 96.000y$

Personalkosten: $K_P = (700x + 2.100y) \cdot 9{,}35 \cdot 1{,}22375$

Gesamtkosten: $K_G = 500x + 3.000y + K_P$

Gewinn: $G = 48.000x + 96.000y - (8.509x + 27.028y) = 39.491x + 68.972y$

Umformen nach y: $y = f(x) = -\frac{39.491x}{68.972} + \frac{G}{68.972} \approx -0{,}57x + \frac{G}{68.972}$

Lösung Aufgabe 4:

Durch Verschiebung des Graphen der Funktion f erhält man, dass die optimale Ecke am Punkt D vorliegt, an dem sich die Begrenzungsgeraden schneiden, die durch die Bedingungen II und V gegeben sind.

Berechnung des Schnittpunkts:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+5 & = & -\frac{1}{3}x + 3{,}5 \\ \Leftrightarrow & -\frac{2}{3}x & = & -1{,}5 \\ \Rightarrow & x & = & 2{,}25 \\ x \cap y: & y & = & -2{,}25 + 5 = 2{,}75 \\ \text{Gewinn:} & G & = & 278.128{,}26\,€ \end{array}$$

27. Ackerplanung – Kommentar

Beschreibung:

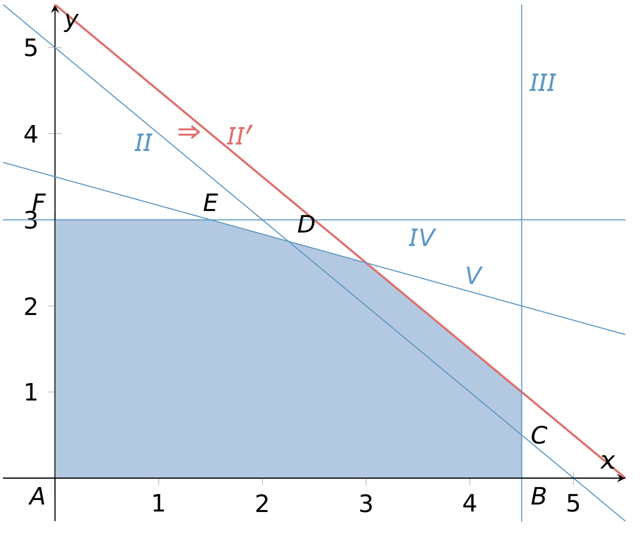
1. Kontext: Ein Landwirt plant systematisch seinen Ackerbau, um auf diese Weise möglichst viel Gewinn zu erzielen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Aufstellung von Funktionsgleichungen, Berechnung von Schnittpunkten und Zeichnen linearer Funktionen, Ungleichungen
4. Mögliche Schwierigkeiten: Benutzung von Excel
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

Zusatzaufgaben: Im nächsten Jahr hat Landwirt Novak etwas Geld ansparen können und kauft 0,5 ha zusätzliches Land, welches ebenfalls dem Anbau von Kartoffeln und Spargel dienen soll.

Aufgabe 5:
Ergänzen Sie Ihre Skizze, indem Sie (evtl. mit einer anderen Farbe) kennzeichnen, wie der neue Zulässigkeitsbereich aussieht.

Lösung Aufgabe 5:
Lediglich die zweite Einschränkung verändert sich durch den Zukauf der Fläche. Der Zulässigkeitsbereich vergrößert sich dadurch ein wenig.



<u>Aufgabe 6</u>:
Um wie viel Prozent wird der Gewinn jetzt gesteigert?

<u>Lösung Aufgabe 6</u>:
Bedingung II ändert sich zu

$$\text{II'}: y \leq -x + 5{,}5.$$

Die optimale Ecke liegt weiter am Schnittpunkt der Geraden, die durch die Bedingungen II' und V gegeben sind. Zu bestimmen ist also die Lösung der Gleichung

$$-x + 5{,}5 = -\frac{1}{3}x + 3{,}5.$$

Als Lösung erhält man analog zu Aufgabe 4 die Werte $x = 3$ und $y = 2{,}5$ und damit einen Gewinn von $290.900{,}86$ €, was eine Gewinnsteigerung von gut $4{,}5$ % bedeutet.

Quellen:

http://www.etl.de/aktuelle-themen/der-flaechendeckende-mindestlohn-kommt
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Hinweis:

Die zugehörige Excel-Datei findet sich unter *www.panama-project.eu*.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Tobias Sildatke, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

28. Laktosegehalt in Käse

Ein milchwirtschaftlicher Laborant untersucht die Milch und die Milcherzeugnisse in Molkereien. Dabei wird auch der Laktosegehalt von Käse untersucht.

Die in Milch enthaltene Laktose spaltet sich durch das Einwirken von Milchsäurebakterien bei der Reifung des Käses in Glukose und Galaktose. Pro Tag spalten sich 2,3 % der Laktose. Käse darf in Deutschland bis zu einem Gehalt von 0,01 g Laktose pro 100 g Käse als laktosefrei bezeichnet werden.

28. Laktosegehalt in Käse – Aufgaben

Aufgabe 1:

Der milchwirtschaftliche Laborant bestimmt bei einem 3 kg schweren Käselaib einer Molkerei aus Eiderstedt einen Anfangslaktosewert von 6 g pro kg. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem der Käselaib als laktosefrei bezeichnet werden darf.

Aufgabe 2:

Aus Erfahrung weiß der milchwirtschaftliche Laborant, dass die Laktosewert-Messungen im Käse nicht immer sehr genau sind und bei ein und demselben Käse um bis zu 10 % voneinander abweichen. Helfen Sie dem milchwirtschaftlichen Laboranten eine sicherere Empfehlung für die Molkerei abzugeben, nach wie vielen Tagen nach der Untersuchung sie den Käse als laktosefrei bezeichnen kann.

28. Laktosegehalt in Käse – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Laktoseabbau lässt sich mit der Formel für Zerfallsprozesse $B(t) = B(0) \cdot a^t$ mit t in Tagen berechnen. Dabei beschreibt $B(0)$ den anfänglichen Laktosewert im Käse. Hier liegen zu Beginn $B(0) = 6\,\frac{\text{g}}{\text{kg}} = 0{,}6\,\frac{\text{g}}{100\,\text{g}}$ Laktose vor.
Mittels der angegebenen prozentualen Abnahme pro Tag (2,3 %) lässt sich der Zerfallsfaktor a berechnen: $a = 1 - 0{,}023 = 0{,}977$. Damit folgt $B(t) = 0{,}6 \cdot 0{,}977^t$.
Für den Zeitpunkt t_1, ab dem der Käse nur noch einen Laktosegehalt von $0{,}01\,\frac{\text{g}}{100\,\text{g}}$ aufweist, gilt $0{,}01 = 0{,}6 \cdot 0{,}977^{t_1}$, also

$$t_1 = \log_{0,977}\left(\frac{0{,}01}{0{,}6}\right) = 175{,}96.$$

Der milchwirtschaftliche Laborant darf den Käse also nach 176 Tagen (knapp 6 Monate) als laktosefrei einstufen.

Lösung Aufgabe 2:

Bei einem Anfangslaktosewert von 6,67 g pro 100 g (10 % Messfehler eingerechnet: 6 g / 90 % = 6,67 g) ergibt sich wie in Aufgabe 1 ein Zeitpunkt t_2 von

$$t_2 = \log_{0,977}\left(\frac{0{,}01}{0{,}667}\right) = 182{,}61.$$

Die Molkerei sollte ihren Käse also frühestens 183 Tage nach der Messung als laktosefrei bezeichnen.

28. Laktosegehalt in Käse – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein milchwissenschaftlicher Laborant untersucht den Laktosegehalt von Käse.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallsfunktionen, inklusive Logarithmus
4. Mögliche Schwierigkeiten: Gewicht des Käselaibes ist angegeben, spielt aber für die Aufgabenlösung keine Rolle.
5. Angesprochenes Berufsfeld: Milchwissenschaftliche*r Laborant*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie

Quellen:

Töpel A. (2016): *Chemie und Physik der Milch, 4. Auflage.* Hamburg: Behr.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

29. Getreidetrocknung

Bei der Ernte ist Getreide witterungsbedingt teilweise zu nass, um es zu verkaufen. Zur besseren Haltbarkeit muss es daher in Trocknungsanlagen getrocknet werden. Bei Weizen ist eine Feuchtigkeit von 14 g pro 100 g erforderlich für eine dauerhafte Lagerung. In der Trocknungsanlage verringert sich die Feuchtigkeit um 22 % in zwei Stunden. Landwirt Peter Hansen erntet seinen Weizen mit einer Feuchtigkeit von 20 g pro 100 g.

29. Getreidetrocknung – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie, wie lange Landwirt Hansen den Weizen in der Trocknung lassen muss, bis dieser den für den Verkauf notwendigen Feuchtigkeitsgrad von 14 g pro 100 g erreicht hat.

29. Getreidetrocknung – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Trocknungsgrad des Weizens in der Trocknungsanlage lässt sich durch eine exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallsfunktion beschreiben. Aus der anfänglichen Feuchtigkeit ergibt sich dabei ein Anfangswert von $B_0 = \frac{20\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 0{,}2$ und aus den weiteren Angaben (Verringerung der Feuchtigkeit um $22\,\%$ in 2 Stunden) ein Zerfallsfaktor von $b = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$ und damit folgende Zerfallsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden:

$$B(t) = B_0 \cdot b^{\frac{1}{2}\cdot t} = 0{,}2 \cdot 0{,}78^{\frac{1}{2}\cdot t}$$

Der Zeitpunkt t_1, zu dem sich die Feuchtigkeit des Weizens auf $B(t_1) = \frac{14\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 0{,}14$ verringert hat, lässt sich dann also wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 0{,}14 &= 0{,}2 \cdot 0{,}78^{\frac{1}{2}\cdot t_1} \\ 0{,}7 &= 0{,}78^{\frac{1}{2}\cdot t_1} \\ 0{,}5 \cdot t_1 &= \log_{0{,}78}(0{,}7) \\ t_1 &= 2 \cdot \log_{0{,}78}(0{,}7) = 2{,}87 \end{aligned}$$

Nach $2{,}87$ Stunden (2 Stunden und 53 Minuten) hat der Weizen also seine Feuchtigkeit auf $\frac{14\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}$ verringert und Landwirt Hansen kann ihn dauerhaft lagern.

29. Getreidetrocknung – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt trocknet seinen Weizen zur dauerhaften Lagerung.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentielle Wachstums- und Zerfallsfunktionen, Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: Verringerung der Feuchtigkeit in zwei Stunden und nicht in einer Stunde angeben
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Wird im Aufgabensatz „verringert sich die Feuchtigkeit um 22 % in zwei Stunden" durch „verringert sich die Feuchtigkeit um 11,7 % in einer Stunde" ersetzt, wird die Schwierigkeit beim Aufstellen und Rechnen mit der Potenz in der Funktionsgleichung herabgesetzt. Das Ergebnis bleibt dabei gleich.

Quellen:

Kruse, M. (2008): *Handbuch Saatgutaufbereitung.* Clenze: Agrimedia GmbH, S. 46–47.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

30. Milchqualität

Eine milchwirtschaftliche Laborantin untersucht die vom Milchkontrolleur angelieferten Milchproben eines Landwirts auf den Zellgehalt in der Milch. Dieser gibt Aufschluss über die Qualität der Milch sowie darüber, ob die Kühe gesund sind und die Milch verarbeitet werden darf. Bis zu einem Wert von 400.000 Zellen pro ml gilt die Qualität der Milch dabei als ausreichend. Nach einer entsprechenden medizinischen Behandlung einer Kuh fällt der Zellgehalt in der Milch um 10 % pro Tag ab.

Die milchwirtschaftliche Laborantin misst bei der Milchprobe einer Kuh einen Zellgehalt von 1.000.000 Zellen pro ml und informiert den Landwirt darüber. Der Landwirt behandelt die Kuh daher umgehend..

30. Milchqualität – Aufgaben

Aufgabe 1:

Die Laborantin soll dem Landwirt Auskunft darüber geben, ab wann die Milch der behandelten Kuh wieder ausreichende Qualität hat. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt und sprechen Sie eine Empfehlung aus.

30. Milchqualität – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Zellgehalt der Milchprobe lässt sich durch eine exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallsfunktion beschreiben. Aus dem anfänglichen Zellgehalt ergibt sich dabei ein Anfangswert von $B_0 = 1.000.000$ Zellen pro ml und aus den weiteren Angaben (Verringerung des Zellgehalts um $10\,\%$ pro Tag) ein Zerfallsfaktor von $b = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ und damit folgende Zerfallsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen:

$$B(t) = B_0 \cdot b^t = 1.000.000 \cdot 0{,}9^t$$

Der Zeitpunkt t_1, zu dem sich der Zellgehalt der Milchprobe auf die zulässigen $B(t_1) = 400.000$ Zellen pro ml verringert hat, lässt sich dann also wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 400.000 &= 1.000.000 \cdot 0{,}9^{t_1} \\ 0{,}4 &= 0{,}9^{t_1} \\ t_1 &= \log_{0,9}(0{,}4) = 8{,}7. \end{aligned}$$

Die milchwirtschaftliche Laborantin kann dem Landwirt also mitteilen, dass sich der Zellgehalt in der Milchprobe nach 9 Tagen auf den zulässigen Höchstwert von 400.000 Zellen pro ml verringert haben wird.

30. Milchqualität – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine milchwirtschaftliche Laborantin untersucht den Zellgehalt einer Milchprobe.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentielle Wachstums- und Zerfallsfunktionen, Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: keine
5. Angesprochenes Berufsfeld: Milchwirtschaftliche*r Laborant*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie, Chemie

Quellen:

https://www.die-milchkontrolle.de/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.topagrar.com/archiv/USA-Zellzahl-Grenze-bleibt-bei-750-000-536204.html
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

31. Fleischqualität

In Deutschland und in der EU gibt es Vorschriften zur Qualitätssicherung von Fleisch. Fleisch darf nur in den Verkauf gelangen, wenn die gesetzlich vorgeschriebenen Höchstmengen an schädlichen Umweltstoffen nicht überschritten werden.

Metacam ist ein Mittel zu Bekämpfung von akuten Atemwegsinfektionen bei Rindern. Landwirtin Anne Müller muss ein erkranktes Tier mit Metacam behandeln und misst nach der Medikamentengabe mittels eines Schnelltestes einen Wert von 2,7 $\frac{\mu g}{ml}$ im Blutplasma des Tieres. Die Halbwertszeit des Medikaments im Blutplasma beträgt 17,5 Stunden. Das Fleisch darf gemäß EU-Verordnung erst ab einem Wert von 0,0000017 $\frac{\mu g}{ml}$ im Blutplasma verzehrt werden.

31. Fleischqualität – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie, wie lange Landwirtin Müller nach der Eingabe des Medikaments warten muss, bis sie die Kuh zur Schlachtung verkaufen darf.

31. Fleischqualität – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Medikamentenabbau lässt sich mit der Formel für Zerfallsprozesse

$$B(t) = B(0) \cdot a^t$$

mit t in Tagen berechnen. Dabei beschreibt $B(0)$ die anfängliche Konzentration des Medikaments im Blutplasma des Rindes. Hier liegen zu Beginn $B(0) = 2{,}7\,\frac{\mu g}{ml}$ Blutplasma des Wirkstoffes vor. Mittels der Halbwertszeit des Medikaments Metacam (17,5 Stunden) lässt sich der Wachstumsfaktor a berechnen.

Es gilt: $\frac{1}{2} = a^{17{,}5} \Leftrightarrow a = \sqrt[17{,}5]{\frac{1}{2}} = 0{,}96.$

Weiter gilt: $B(0) = 2{,}7\,\frac{\mu g}{ml}$ und $B(t) = 0{,}0000017\,\frac{\mu g}{ml}$.

Mit dem verordneten Wert von $0{,}0000017\,\frac{\mu g}{ml}$ Blutplasma ergibt sich eine Wartezeit t von

$$B(t) = B(0) \cdot a^t \Leftrightarrow t = \log_a\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right)$$

$$\Rightarrow t = \log_{0{,}96}\left(\tfrac{0{,}0000017}{2{,}7}\right) \approx 350\,\text{Stunden} \approx 15\,\text{Tage}.$$

Landwirtin Müller darf die Kuh also gemäß Verordnung frühestens nach 15 Tagen zur Schlachtung bringen, um die Qualität des Fleisches zu gewährleisten.

31. Fleischqualität – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin berechnet Medikamentenrückstände bei Rindern.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentielle Funktionen sowie Logarithmus und exponentieller Zerfall
4. Mögliche Schwierigkeiten: Versuch der Umwandlung von 0,0000017 $\frac{\mu g}{ml}$ in andere Einheiten
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie

Didaktischer Kommentar:

Es ist auch eine Lösung ohne Kenntnisse von Zerfallsprozessen und exponentiellen Funktionen denkbar: Wiederholtes Halbieren der Medikamentenkonzentration liefert ein approximiertes Ergebnis der Wartezeit. Dies kann auch durch das Zeichnen eines Graphen unterstützt werden.

Quellen:

https://www.ema.europa.eu/en/documents/variation-report/metacam-v-c-33-x-0119-epar-assessment-report-variation_en.pdf [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

32. Getreidehaufen

Landwirtin Linda Jensen erntet auf ihren 10 ha insgesamt 45 t Hafer. Mit Hilfe eines Förderbands soll der frisch geerntete Hafer auf einen Haufen aufgeschüttet werden. Das Förderband ist 7 m lang und hat einen maximalen Steigungswinkel von 28°.

32. Getreidehaufen – Aufgaben

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Höhe, die mit dem Förderband von Landwirtin Jensen maximal erreicht werden kann.

Aufgabe 2:
Hafer hat einen Schüttwinkel (Winkel zwischen Boden und Mantellinie des Schütthaufens) von 30°. Bestimmen Sie den Durchmesser des größten Haferhaufens, der mit dem Förderband von Landwirtin Jensen aufgeschüttet werden kann.

Aufgabe 3:
Hafer hat eine Schüttdichte von 50 kg pro Hektoliter, also 500 kg/m^3. Reicht das Förderband von Landwirtin Jensen aus, um ihre gesamte Haferernte auf einen Haufen zu schütten? Helfen Sie ihr bei der Berechnung.

32. Getreidehaufen – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Betrachtet man vom Winkel des Förderbands zum Boden ($\alpha = 28°$) ausgehend das Förderband als Hypotenuse c eines Dreiecks mit Höhe h, so gilt $\sin(\alpha) = \frac{h}{c}$ und damit beträgt die Höhe, die maximal erreicht werden kann, $h = c \cdot \sin(\alpha) = 7\,\mathrm{m} \cdot \sin(28°) = 3{,}29\,\mathrm{m}$.

Lösung Aufgabe 2:

Durch Aufschütten des Hafers entsteht annähernd ein Kegel mit Höhe h, Grundflächenradius r, Mantellinie s und Schüttwinkel β zwischen Radius und Mantellinie.
Aus $\tan(\beta) = \frac{h}{r}$ und Aufgabe 1 folgt dann $r = \frac{h}{\tan(\beta)} = \frac{3{,}29\,\mathrm{m}}{\tan(30°)} = 5{,}69\,\mathrm{m}$, so dass der Haferhaufen maximal einen Durchmesser von $2 \cdot 5{,}69\,\mathrm{m} = 11{,}38\,\mathrm{m}$ erreichen kann.

Lösung Aufgabe 3:

Der mit dem Förderband maximal mögliche Haferhaufen hat ein Volumen V von
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (5{,}69\,\mathrm{m})^2 \cdot 3{,}29\,\mathrm{m} = 111{,}54\,\mathrm{m}^3$, was bei einer Haferschüttdichte von $500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ einem Gewicht von $111{,}54\,\mathrm{m}^3 \cdot 500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 55.772{,}36\,\mathrm{kg} = 55{,}78\,\mathrm{t}$ entspricht.
Die 45 t geernteter Hafer von Landwirtin Jensen lassen sich also mit ihrem Förderband zu einem Haufen aufschütten.

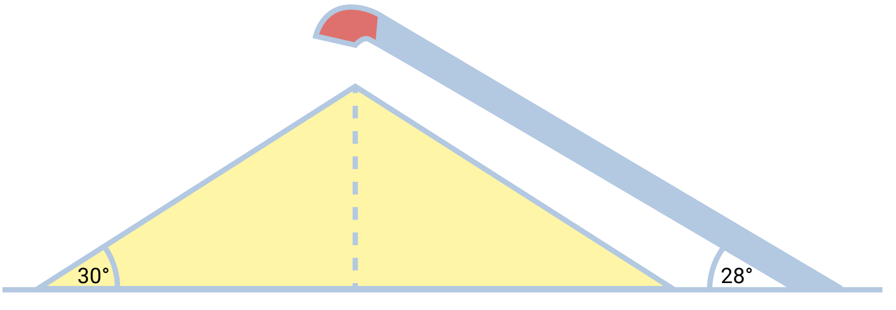
32. Getreidehaufen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Landwirtin schüttet ihre Halerernte mit Hilfe eines Förderbands auf einen Haufen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L2: Messen, L3: Raum und Form
3. Vorwissen: Trigonometrische Funktionen, Volumen vom Kegel
4. Mögliche Schwierigkeiten: Räumliche Orientierung/Vorstellung ohne vorgegebene Skizze
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 9. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Skizze zu Aufgabe 1 und 2:



Didaktischer Kommentar:

Alternativ kann in Aufgabe 3 auch die Höhe eines Haufens berechnet werden, der aus 45 t Hafer aufgeschüttet wird. Diese beträgt 3,06 m und ist somit geringer als die mit dem Förderband maximal mögliche Höhe. Hierbei spielt das Umstellen und Einsetzen der Tangens-Gleichung und der Volumenformel eine größere Rolle, da sowohl Radius als auch Höhe eines solchen Haufens zunächst unbekannt sind, sodass L4: Funktionaler Zusammenhang stärker angesprochen wird.

Quellen:

http://www.tis-gdv.de/tis/ware/getreide/hafer/hafer.htm [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.mollet.de/info/schuettgutdichte.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

33. Wasserqualität im Produktionsteich

Durch das Wachstum von Algen und Pflanzen werden die Werte der Gewässergüte beeinflusst. Kalkprodukte stabilisieren den pH-Wert des Wassers auf einen Wert zwischen 7,5 und 8,5. So können Krankheiten und Stress bei Fischen reduziert werden. Fischwirt Meier möchte für die Verbesserung der Wasserqualität in seinem 1.400 m^2 großen und durchschnittlich 1,2 m tiefen Karpfenteich einmalig ein Kalk-Produkt kaufen. Es stehen drei Produkte zur Wahl, die für einen pH-Wert zwischen 7,5 und 8,5 sorgen und in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet sind.

Produkt	Preis in €	Inhalt in kg	Dosis in g/m^3
Superkalk	89,90	10	50
Aquaclean	119,90	25	100
Turbokalk XXL	219,90	50	100

33. Wasserqualität im Produktionsteich – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Wasservolumen im Karpfenteich von Fischwirt Meier.

Aufgabe 2:

Welches der Produkte ist am preiswertesten? Sprechen Sie Herrn Meier eine Empfehlung aus.

33. Wasserqualität im Produktionsteich – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Wasservolumen: $1.400\,\mathrm{m}^2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} = 1.680\,\mathrm{m}^3$.

Lösung Aufgabe 2:

Notwendige Menge = Wasservolumen $\cdot \frac{\text{Dosis}}{\text{Inhalt}}$

Superkalk: $1.680\,\mathrm{m}^3 \cdot \dfrac{50\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}}{10.000\,\mathrm{g}} = 8{,}4 \Rightarrow 9$

Aquaclean: $1.680\,\mathrm{m}^3 \cdot \dfrac{100\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}}{25.000\,\mathrm{g}} = 6{,}72 \Rightarrow 7$

Turbokalk XXL: $1.680\,\mathrm{m}^3 \cdot \dfrac{100\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}}{50.000\,\mathrm{g}} = 3{,}36 \Rightarrow 4$

Kosten = Notwendige Menge · Preis

Superkalk: $9 \cdot 89{,}90\,€ = 809{,}10\,€$

Aquaclean: $7 \cdot 119{,}90\,€ = 839{,}30\,€$

Turbokalk XXL: $4 \cdot 219{,}90\,€ = 879{,}60\,€$

Superkalk ist mit einem Preis von $809{,}10\,€$ für den Karpfenteich von Fischwirt Meier am preiswertesten.

33. Wasserqualität im Produktionsteich – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Fischwirt möchte sich ein preiswertes Kalk-Produkt zur Verbesserung der Wasserqualität seines Produktionsteiches kaufen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L1: Zahl
3. Vorwissen: Dreisatz
4. Mögliche Schwierigkeiten: Bezug zwischen Dosis und Inhalt der Produkte herstellen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Fischwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 7. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Chemie, Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 2: Angabe für jedes der drei Produkte: „Reicht für 200 m^3 (Superkalk) bzw. 250 m^3 (Aquaclean) bzw. 500 m^3 (Turbokalk XXL)“.

Quellen:

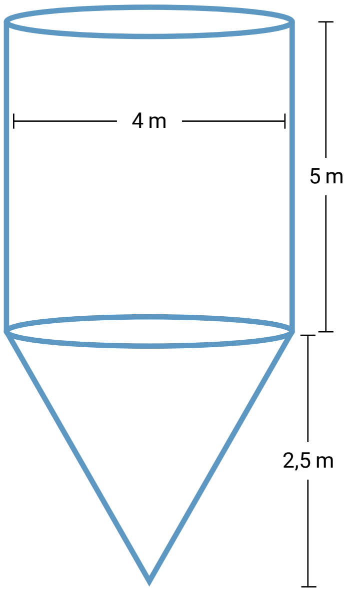
https://www.alles-fisch.at/aquastab-superkalk.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

34. Hühnerfutter

Landwirt Novak hat einen landwirtschaftlichen Betrieb, auf dem 5.000 Hühner leben. Die Hühner bekommen ein Basisfutter, welches 149,00 € pro 250-kg-Futtersack kostet. Auf den Futtersäcken ist ein Volumen von 0,42 m^3 angegeben. Pro Huhn rechnet er mit einem täglichen Futterbedarf von 120 g.

Herr Novak lagert das Futter in einem runden Silo mit kegelförmigem Trichter, durch den die Futterentnahme erleichtert wird. Mit Hilfe eines langen Messstabes bestimmt Landwirt Novak grob die Maße des Silos und notiert sie in der hier angegebenen Skizze.



34. Hühnerfutter – Aufgaben

Aufgabe 1:

Der Silo ist demnächst komplett leer. Wie teuer ist es, ihn komplett zu füllen? Wie lange hält dieser Vorrat? Helfen Sie Landwirt Novak bei der Berechnung.

Aufgabe 2:

Für seinen Jahresabschluss will Herr Novak die Kosten für Hühnerfutter pro Monat aufführen. Geben Sie daher die durchschnittlichen monatlichen Futterkosten an.

Aufgabe 3:

Nach einiger Zeit merkt Landwirt Novak, dass manche Hühner unterernährt sind und Mangelerscheinungen aufweisen. Um dem entgegenzuwirken, möchte er sein Futterbudget um 50 % steigern und das Basisfutter mit einem Premiumfutter mischen, das bessere Nährwerteigenschaften hat. Die Kosten für 200 kg Premiumfutter liegen bei 229,00 €. Er hat es zuvor an einer Gruppe von 50 unterernährten Hühnern getestet und ist mit dem Resultat zufrieden. Berechnen Sie, wie viel Basisfutter und wie viel Premiumfutter Landwirt Novak monatlich miteinander mischen kann, wenn er im Rahmen seines neuen Budgets einen möglichst hohen Anteil des Premiumfutters erreichen will?*

*Hinweis: Sollten Sie in Aufgabe 2 zu keinem Ergebnis gekommen sein, so rechnen Sie mit monatlichen Futterkosten in Höhe von 11.000 € und einer Futtermenge von 18.000 kg.

34. Hühnerfutter – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Der Futtersilo setzt sich aus einem Zylinder (oben) und einem Kegel (unten) zusammen.

Volumen Zylinder: $V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (2\,\text{m})^2 \cdot 5\,\text{m} = 62{,}83\,\text{m}^3$

Volumen Kegel: $V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\,\text{m})^2 \cdot 2{,}5\,\text{m} = 10{,}47\,\text{m}^3$

Gesamtvolumen: $V = V_Z + V_K = 62{,}83\,\text{m}^3 + 10{,}47\,\text{m}^3 = 73{,}3\,\text{m}^3$

Für eine komplette Füllung benötigt Herr Novak damit also $\frac{73{,}3\,\text{m}^3}{0{,}42\,\text{m}^3} = 174{,}52$ Futtersäcke à 250 kg. Entsprechend muss Herr Novak 175 Futtersäcke kaufen und hat dafür Kosten in Höhe von $175 \cdot 149\,€ = 26.075\,€$.
Pro Tag fressen die 5.000 Hühner insgesamt $5.000 \cdot 0{,}12\,\text{kg} = 600\,\text{kg}$ Futter, sodass 43.750 kg Futter (175 Säcke à 250 kg) für $\frac{43.750\,\text{kg}}{600\,\text{kg}} = 72{,}92$ Tage, also knapp 73 Tage reichen.

Lösung Aufgabe 2:

Im Monat fressen die Hühner $\frac{365 \cdot 0{,}120\,\text{kg} \cdot 5000}{12} = 18.250\,\text{kg}$ Futter. Das entspricht insgesamt $\frac{18.250\,\text{kg}}{250\,\text{kg}} = 73$ Futtersäcken à 149 €. Landwirt Novak hat also monatliche Futterkosten in Höhe von $73 \cdot 149\,€ = 10.877\,€$. In Monaten mit maximal 30 Tagen bleibt damit ein kleiner finanzieller Überschuss, der wiederum in den Monaten mit 31 Tagen verrechnet werden kann. Um eventuelle leichte Verbrauchs- oder Preisschwankungen abfangen zu können, sollte Landwirt Novak im kommenden Jahr mit 11.000 € kalkulieren.

Lösung Aufgabe 3:

Schlägt Landwirt Novak auf das alte Monatsbudget einen Zuschlag von 50 % drauf, so beträgt sein neues Budget $11.000\,€ \cdot 1{,}5 = 16.500\,€$.
Sei x das Gewicht des Basisfutters und y das Gewicht des Premiumfutters in kg. Dann gilt für das benötigte Gesamtgewicht $x + y = 18.250\,\text{kg}$.
1 kg des Basisfutters kostet $\frac{149\,€}{250\,\text{kg}} = 0{,}60\,\frac{€}{\text{kg}}$.
1 kg des Premiumfutters kostet $\frac{229\,€}{200\,\text{kg}} = 1{,}15\,\frac{€}{\text{kg}}$.

Basisfutter in kg	Premiumfutter in kg	Kosten in €
18.250	0	10.877
17.250	1.000	11.426
16.250	2.000	11.975
15.250	3.000	12.524
14.250	4.000	13.073
13.250	5.000	13.622
12.250	6.000	14.171
11.250	7.000	14.720
10.250	8.000	15.269
9.250	9.000	15.818
8.250	10.000	16.367
7.250	11.000	16.916
6.250	12.000	17.465

Folgende Bedingungen sind vorgegeben:
$x + y \geq 18.250$ und $0{,}6 \cdot x + 1{,}15 \cdot y \leq 16.500$.

Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 18.250 \\ 0{,}6 \cdot x + 1{,}15 \cdot y &= 16.500. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 18.250 - y$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0{,}6 \cdot (18.250 - y) + 1{,}15 \cdot y &= 16.500 \\ 10.950 + 0{,}55 \cdot y &= 16.500 \\ 0{,}55 \cdot y &= 5.550 \\ y &= 10.090{,}91\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Herr Novak kann also $\frac{10.091\,\text{kg}}{200\,\text{kg}} = 50, 46$, d.h. abgerundet 50 Säcke Premiumfutter für insgesamt $50 \cdot 229\,€ = 11.450\,€$ kaufen. Hinzu kommen $x = 18.250 - y = 18.250 - 10.090 = 8.160\,\text{kg}$ Basisfutter, also $\frac{8.160\,\text{kg}}{250\,\text{kg}} = 32, 64$, auf ganze Säcke aufgerundet somit 33 Säcke für insgesamt $33 \cdot 149\,€ = 4.917\,€$.
Sein neues Monatsbudget von 16.500 € hat er dann eingehalten mit Futterkosten in Höhe von $11.450\,€ + 4.917\,€ = 16.367\,€$.

* Für die Berechnung mit der gegebenen monatlichen Futtermenge von 18.000 kg sowie aktuellen monatlichen Futterkosten von 11.000€ergibt sich eine Zusammensetzung aus 51 Säcken Premium- und 32 Säcken Basisfutter.

34. Hühnerfutter– Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Landwirt Novak optimiert seine Futterentscheidungen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch Lösen, L1: Zahl, L3: Raum und Form, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Volumenberechnung Kreiskegel und Zylinder, elementare Prozentrechnung (Dreisatz), Umgang mit Ungleichungen, Lösen linearer Gleichungssysteme
4. Mögliche Schwierigkeiten: Modellierung der Mischung als LGS
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie, Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Hinweis zu Aufgabe 1:
Der Futtersilo ist oberhalb zylinderförmig, der untere Teil kann als Kreiskegel betrachtet werden (ggf. Angabe der jeweiligen Volumenformel)

▲ Zusatzaufgabe zu Aufgabe 1:
Die oberen 4,5 m des Futtersilos sind bereits leer. Geben Sie an, wie lange der verbliebene Futtervorrat noch reichen wird.

▲ Zusatzaufgabe zu Aufgabe 1 (Falls Strahlensätze bereits bekannt sind):
Von oben gemessen ist der Füllstand des Futtersilos bereits um 6 m gesunken. Geben Sie an, wie lange der verbliebene Futtervorrat noch reichen wird.

▲ Zusatzaufgabe zu Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die prozentuale Zusammensetzung des Futters aus Basis- und Premiumfutter.

Didaktischer Kommentar:

Um das Verständnis der Modellgleichung in Aufgabe 3 zu unterstützen, bietet sich eine Betrachtung von möglichen Mischungen in einer Tabelle (ggf. digital) an. Siehe dazu auch die Lösung.

Quellen:

http://www.huehner-haltung.de/futter/huehnerfutter.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.eierschachteln.de/shopware2/gefluegelfutter/?gclid=CMXX_P7IvNACFdTNG wodruQLBQ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Tobias Sildatke, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

35. Düngung

Landwirt Michael Petersen aus Nortorf düngt seine Felder mit Stickstoffdünger, damit das Getreide besser wächst und so der Ertrag bei der Ernte höher wird. Dabei muss sich Landwirt Petersen Gedanken machen, wie viel Stickstoffdünger er auf das Feld streut, sodass der Gewinn möglichst hoch ist. Bei zu viel Dünger wird der Ertrag nicht mehr erhöht, die Umwelt geschädigt und Herr Petersen hat unnötig viel Geld ausgegeben. Er baut auf insgesamt 12 ha Getreide an.

Landwirtschaftliche Forschungen haben ergeben, dass der Gewinn pro ha (in €) mit der Menge des eingesetzten Düngers gemäß folgender Funktionsgleichung zusammenhängt:

$$f(N_1) = -0,024 \cdot N_1^2 + 8,67 \cdot N_1 - 592$$

Dabei bezeichnet N_1 die Menge des Stickstoffdüngers in kg, mit der auf jedem ha gedüngt wird. Die Formel berücksichtigt dabei neben den Preisen für das Düngemittel (Kalkammonsulfat, 197 € /t) auch die Festkosten (Ernte- und Saatgutkosten, Pacht, Versicherung und so weiter).

35. Düngung – Aufgaben

Aufgabe 1:

Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in ein Koordinatensystem. Nutzen Sie dazu x-Werte zwischen 80 und 280.

Aufgabe 2:

Beraten Sie Herrn Petersen, wie viel kg Stickstoffdünger er pro ha auf das Feld bringen muss, damit sein Gewinn am höchsten ist. Mit welchen Kosten für Getreide-Düngemittel hat er zunächst zu rechnen?

35. Düngung – Lösung

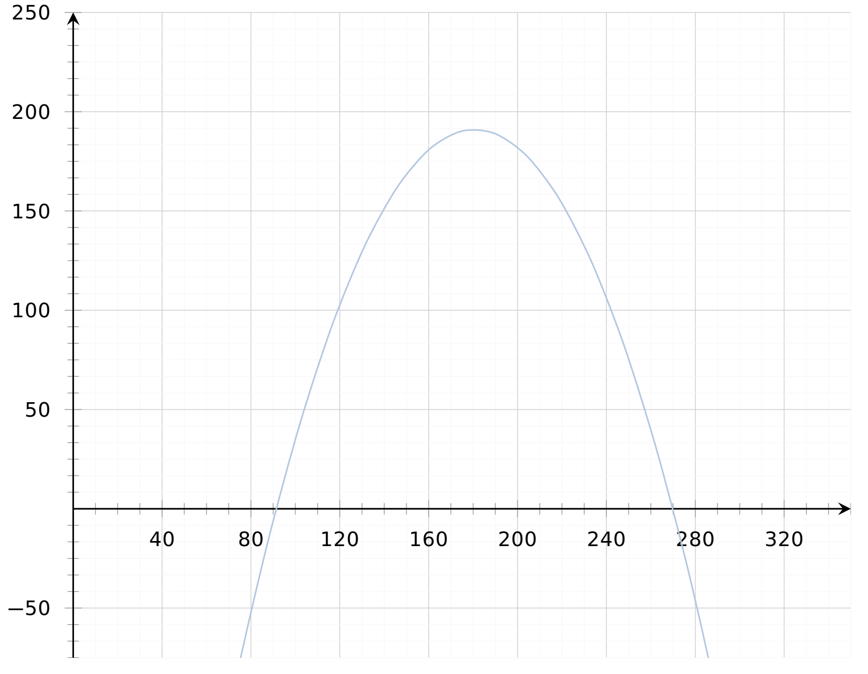
Lösung Aufgabe 1:

Die folgende Funktion f beschreibt für jeden ha den Gewinn in € in Abhängigkeit von der eingesetzten Stickstoffmenge N_1 in kg:

$$f(N_1) = -0{,}024 \cdot N_1^2 + 8{,}67 \cdot N_1 - 592.$$

Scheitelpunktsform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right)\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4 \cdot a} + c\right)$

$$\begin{aligned} f(N_1) &= -0{,}024 \cdot \left(N_1 + \frac{8{,}67}{-0{,}024 \cdot 2}\right)^2 - \frac{8{,}67^2}{-0{,}024 \cdot 4} - 592 \\ &= -0{,}024 \cdot (N_1 - 180{,}625)^2 + 191{,}009 \end{aligned}$$



Lösung Aufgabe 2:

1. Lösung – mit Differentialrechnung:

$$
\begin{array}{lll}
 & f(N_1) & = -0{,}024 \cdot N_1^2 + 8{,}67 \cdot N_1 - 592 \\
\Rightarrow & f'(N_1) & = -0{,}048 \cdot N_1 + 8{,}67 \\
 & f'(N_1) & = 0 \\
\Leftrightarrow & 0 & = -0{,}048 \cdot N_1 + 8{,}67 \\
\Leftrightarrow & N_1 & = 180{,}63
\end{array}
$$

Es bleibt zu zeigen: $f''(N_1) < 0$

$$f''(180{,}63) = -0{,}048 < 0$$

2. Lösung – ohne Differentialrechnung:

Ablesen: $f(180) \approx 190$

Herr Petersen sollte also mit etwa 180 kg Stickstoffdünger pro ha Feld düngen, um maximalen Gewinn zu erzielen. Dieser liegt dann bei $f(180) = 191\,€$ pro ha, für ihn also bei insgesamt $12 \cdot 191\,€ = 2.292\,€$.

Bei 12 ha Anbaufläche, gut 180 kg Stickstoffdünger pro ha und einem Preis von $197\,\frac{€}{\mathrm{t}}$ für das Düngemittel Kalkammonsulfat ergeben sich Kosten von $12 \cdot 0{,}18\,\mathrm{t} \cdot 197\,\frac{€}{\mathrm{t}} = 425{,}52\,€$.

35. Düngung – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Landwirt bestimmt die optimale Düngemenge bei der Felddüngung.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Ableitung einer Funktion, Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion
4. Mögliche Schwierigkeiten: Lösungsverfahren über Differentialrechnung oder Scheitelpunktsform erkennen
5. Angesprochenes Berufsfeld: Landwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Wirtschaft (Kosten- und Gewinnfunktionen)

Differenzierungsmöglichkeiten und didaktischer Kommentar:

▼ Zu Aufgabe 2: Die Stickstoffmenge pro ha für den maximalen Gewinn lässt sich auch ohne Ableitungskenntnisse approximativ über den in Aufgabe 1 gezeichneten Graphen bestimmen.

Quellen:

http://www.kmaier.de/facharb/html/Prod.htm [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://markt.agrarheute.com/duengemittel-4/stickstoffduenger-20 [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Ines Niebuhr, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

36. Algenzucht

Algenzucht gewinnt weltweit immer mehr an Bedeutung, weil sie einen hohen Gehalt an Mineralien, Vitaminen, Kohlenhydraten und Proteinen enthalten. Allein in Frankreich und Irland werden jährlich 200 t Algenfrischgewicht (FG) der Rotalge Palmaria verspeist. Jährliche Umsätze liegen momentan bei 5 Mrd. Dollar, wobei die Tendenz ansteigt.

Sie arbeiten zusammen mit der Meeresbiologin Petra Kramer in der Sylter Algenfarm in List und unterstützen sie bei ihren Berechnungen. Frau Kramer untersucht das Wachstum unterschiedlicher Algensorten, um Bedingungen für eine optimale Produktion zu ermitteln. Die Algen werden in kreisförmigen Wassertanks gezüchtet. Diese liegen etwa 70 cm tief im Wasser.

Zu Projektbeginn gab man je 10 kg FG der Rotalge Palmaria palmata sowie der Braunalge Laminaria sccharina in Tanks mit je 2 m Durchmesser. Laut Hersteller fassen die Tanks pro m^2 Grundfläche maximal 8 kg Algen.

36. Algenzucht – Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie, wie viel Kilogramm FG Algen maximal in so einem Tank gezüchtet werden kann.

Aufgabe 2:

Mit Natriumdampflampen konnte das Wachstum der Algen beschleunigt werden, sodass es annähernd exponentiell verläuft. Zunächst wurde ermittelt, zu welchem Zeitpunkt sich das FG der Algen verdoppelt. Dies war bei der Rotalge nach drei Monaten der Fall, bei der Braunalge nach 2,5 Monaten. Um wie viel Prozent nimmt das FG der Rot- bzw. Braunalge pro Monat zu?

Aufgabe 3:

Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten die Tanks der Rot- bzw. der Braunalge voll sind*.

*Hinweis: Sollten Sie in Aufgabe 1 zu keinem Ergebnis gekommen sein, rechnen Sie mit einer maximalen Menge von 25 kg FG.

Aufgabe 4:

Zur Prozessoptimierung wurde im dritten Projektjahr 20 kg FG der Rotalge in einen Tank mit 6 m Durchmesser gegeben. Außerdem wurde die Wasserfilterung verbessert. Dadurch hat das FG bereits nach einem halben Monat 5 kg zugenommen. Bestimmen Sie den neuen monatlichen Wachstumsfaktor.

Aufgabe 5:

Die Rotalge soll nun im 6-m-Durchmesser-Tank kommerziell gezüchtet werden. Dazu soll – sobald der Tank voll ist – im Wochentakt eine gewisse Menge entnommen werden, so dass der Tank eine Woche später wieder komplett gefüllt ist. Berechnen Sie, welche Menge der Rotalge wöchentlich entnommen werden kann**.

**Hinweis: Sollten Sie in Aufgabe 4 zu keinem Ergebnis gekommen sein, rechnen Sie mit einem Wachstumsfaktor von 1,55.

36. Algenzucht – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Kreisfläche: $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Grundfläche Tank: $A_T = \pi \cdot (1\,\mathrm{m})^2 = \pi\,\mathrm{m}^2$

Maximales FG: $FG_max = A_T \cdot \text{max. Fassungsvermögen}$

$= \pi\,\mathrm{m}^2 \cdot 8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \approx 25{,}1\,\mathrm{kg}$

Lösung Aufgabe 2:

Da eine Verdoppelung des FG nach drei Monaten eintritt, wird die Vermehrung der Rotalge durch den Faktor $2^{\frac{t}{3}}$ modelliert, wobei t die Zeit in Monaten ist.
Es gilt $2^{\frac{t}{3}} = (\sqrt[3]{2})^t \approx 1{,}26^t$.
Das heißt, der Wachstumsfaktor hat den Wert $1{,}26$ und die prozentuale Zunahme liegt im Monat bei $26\,\%$. Entsprechend ergibt sich bei der Braunalge ein Wachstumsfaktor von $1{,}32$, was einer monatlichen Zunahme von $32\,\%$ entspricht.

Lösung Aufgabe 3:

Funktionen zur Beschreibung des monatlichen Wachstums:

Rotalge: $f_R(t) = 10\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}26^t$

Braunalge: $f_B(t) = 10\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}32^t$

Es gilt $10\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}26^t = 25{,}1\,\mathrm{kg} \Leftrightarrow 1{,}26^t = 2{,}51 \Leftrightarrow t = \frac{\log(2{,}51)}{\log(1{,}26)} \approx 4$
und $10\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}32^t = 25{,}1\,\mathrm{kg} \Leftrightarrow 1{,}32^t = 2{,}51 \Leftrightarrow t = \frac{\log(2{,}51)}{\log(1{,}32)} \approx 3{,}3$.

Der Tank der Rotalge ist nach knapp vier Monaten voll, der der Braunalge nach gut drei Monaten.

Lösung Aufgabe 4:

Es gilt $20\,\mathrm{kg} \cdot a^{\frac{1}{2}} = 25\,\mathrm{kg} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 1{,}25 \Rightarrow a \approx 1{,}56$.
Der Wachstumsfaktor hat also den Wert $1{,}56$.

Lösung Aufgabe 5:

Da sich eine Kreisfläche mit dreifachem Radius verneunfacht, hat der neue Tank eine Fläche von ca. $28{,}27\,\mathrm{m}^2$. Das maximale Gewicht der Rotalge beträgt also $28{,}27\,\mathrm{m}^2 \cdot 8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \approx 226\,\mathrm{kg}$.
Sei k das FG der Rotalge nach Entnahme der wöchentlichen Algenmenge. Dann gilt

$$k \cdot 1{,}56^{\frac{1}{4}} = 226\,\mathrm{kg} \Leftrightarrow k = \frac{226\,\mathrm{kg}}{1{,}56^{\frac{1}{4}}} \approx 202\,\mathrm{kg}.$$

Am Ende der Woche können also $226\,\mathrm{kg} - 202\,\mathrm{kg} = 24\,\mathrm{kg}$ entnommen werden.

36. Algenzucht – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Meeresbiologin untersucht Bedingungen für optimales Wachstum verschiedener Algen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L3: Raum und Form, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Dichtekonzept, Berechnung von Kreisflächen, Exponentielles Wachstum, alle Umformungen an der Gleichung $y = k \cdot a^x$
4. Mögliche Schwierigkeiten: Grundlagen der Berechnung exponentieller Zusammenhänge
5. Angesprochenes Berufsfeld: Meeresbiolog*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 3: Lösung von Aufgabe 2 vorgeben: Das FG von Rot- bzw. Braunalge nimmt monatlich um 26 % bzw. 32 % zu.

Didaktischer Kommentar:

Algen zu züchten könnte für Schüler*innen evtl. wenig motivierend klingen. Auf den in den Quellen angegebenen Internetseiten findet man interessante Hintergrundinformationen zu diesem Thema.

Quellen:

http://www.algenfarm.de/laminaria.htm [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.dbu.de/projekt_18355/01_db_2409.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Tobias Sildatke, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

37. Arzneimittelrückstände bei Fischen

Da der Nahrungsmittelbedarf an Fisch stetig steigt, wächst auch die kontrollierte Aufzucht von Fischen stark an. Die gezüchteten Fische benötigen Arzneimittel gegen verschiedene Krankheiten. Die Medikamente für Fische können aber die menschliche Gesundheit gefährden. Aus diesem Grund muss gemäß der EU-Verordnung zwischen der letzten Verabreichung des Arzneimittels und der Schlachtung der Fische eine festgelegte Wartezeit liegen. Die Wartezeit ist unter anderem abhängig von der festgelegten Rückstandshöchstmenge, die beim Verkehr des Fischens für den Menschen ungefährlich ist und nicht überschritten werden darf.

Fischwirt Peter Meier aus Rendsburg züchtet Regenbogenforellen und verabreicht diesen unter Aufsicht eines Tierarztes ein Arzneimittel mit einer festgelegten Rückstandshöchstmenge von 10 µg/kg. Da vom Hersteller des Mittels keine Daten für die Wartezeit vorliegen, gilt folgende allgemeine Regelung, die eine deutlich geringere Rückstandsmenge erwarten lässt:
Mindestwartezeit in Tagen: 500/Wassertemperatur (in °C)

37. Arzneimittelrückstände bei Fischen – Aufgaben

Aufgabe 1:

Die Wassertemperatur im Aufzuchtbecken wird konstant auf 7°C gehalten. Berechnen Sie, wie lange die Mindestwartezeit für Herrn Meier beträgt.

Aufgabe 2:

Nach der Mindestwartezeit werden die tatsächlichen Arzneimittelrückstände einiger Fische untersucht, um sicherzustellen, dass die Wartezeit ausreicht. Die Untersuchungen liefern Werte von bis zu 3 µg/kg. Das verabreichte Arzneimittel hat laut Packungsbeilage eine Halbwertszeit von 14 Tagen. Helfen Sie Fischwirt Meier bei den folgenden Berechnungen:

a) Arzneimittelgehalt direkt nach der letzten Arzneimittelgabe
b) Anzahl der Tage, auf die die Mindestwartezeit hätte gekürzt werden können, ohne dass die Werte die Rückstandshöchstmenge überschritten hätte.

37. Arzneimittelrückstände bei Fischen– Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Die Mindestwartezeit beträgt $\frac{500}{7} = 71{,}43$, also aufgerundet 72 Tage.

Lösung Aufgabe 2:

Die zunächst verabreichte Dosis lässt sich mit einem Diagramm veranschaulichen und abschätzen.

Zur rechnerischen Lösung:

a) Sei a der Arzneimittel-Gehalt aus den Untersuchungsergebnissen und x die Wartezeit in Tagen. Dann gilt für den Wert y (Arzneimittel-Gehalt nach der letzten Arzneimittelgabe):

$$y = a \cdot 2^{\frac{x}{14}} = 3\,\frac{\mu}{\text{kg}} \cdot 2^{\frac{72}{14}} = 106\,\frac{\mu}{\text{kg}}.$$

b) Sei nun $a = 10\,\frac{\mu}{\text{kg}}$ und $y = 106\,\frac{\mu}{\text{kg}}$. Gesucht ist x.

$$\begin{aligned} &y = a \cdot 2^{\frac{x}{14}} \\ &x = 14 \cdot \log_2\left(\frac{y}{a}\right) = 14 \cdot \log_2(10{,}6) = 47{,}68 \end{aligned}$$

Bei einer Wartezeit von 48 Tagen lägen die Werte für die Arzneimittelrückstände im Fischkörper somit noch unter der Rückstandshöchstmenge von $10\,\frac{\mu}{\text{kg}}$. Fischwirt Meier kann die Wartezeit also tatsächlich kürzer halten als durch die allgemeinen Regelung vorgegeben.

37. Arzneimittelrückstände bei Fischen – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Fischwirt verabreicht seinen Fischen ein Arzneimittel und muss die Mindestwartezeit einhalten und berechnen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentialfunktion, Halbwertzeit, Logarithmus
4. Mögliche Schwierigkeiten: Aufstellen der Funktionsgleichung in Aufgabe 2b
5. Angesprochenes Berufsfeld: Fischwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie

Differenzierungsmöglichkeiten:

- Allgemeine Funktionsgleichung in Aufgabe 2b vorgeben.

Didaktischer Kommentar:

In Aufgabe 2 ist eine abgeschätzte Lösung mit Verwendung eines Diagramms und ohne Verwendung der Exponentialfunktion möglich.

Quellen:

Bauer, W. H. Rapp, J. (2003): *Gesunde Fische: Praktische Anleitung zum Vorbeugen, Erkennen und Behandeln von Fischkrankheiten*. Berlin & Wien: Parey, S. 232.
https://de.wikipedia.org/wiki/Tierarzneimittel#Wartezeit [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

38. Forellenwachstum

Fischwirt Peter Meier möchte für die nächste Saison im März erneut Forellen-Jungfische kaufen und bis zu einem schlachtreifen Durchschnittsgewicht von 400 g heranfüttern. Bislang hat er Fischfutter für den Kilopreis von 1,29 € gekauft. Diesmal möchte er auf höherwertige Premium-Kraftfutter-Pellets übergehen, die einen Kilopreis von 1,68 € haben.

Die Futterumsatzrate F wird über die Formel F = Futtermenge/Wachstumszunahme (jeweils in kg) berechnet. Das bisherige Futter hatte eine Futterumsatzrate von 1,2 und das neue Premium-Kraftfutter hat eine Futterumsatzrate von nur 0,9.

38. Forellenwachstum – Aufgaben

Aufgabe 1:
Erklären Sie Fischwirt Meier, warum eine geringere Futterumsatzrate besser als eine höhere ist.

Aufgabe 2:
Vergleichen Sie das Preis-Leistungs-Verhältnis der beiden Futtersorten.

Aufgabe 3:
Trotz der etwas höheren Kosten für das Premium-Kraftfutter hat sich Fischwirt Meier für den Kauf entschieden, da die Wasserbelastung und die Sterblichkeit der Forellen dadurch gesenkt werden. Um zu überprüfen, dass sich die ursprüngliche Wachstumsrate seiner Forellen von 1,1 % pro Tag bei dem neuen Futter nicht verringert hat, wiegt Fischwirt Meier an einem festgelegten Tag einige Fische. Er notiert, dass das Anfangsgewicht durchschnittlich bei 151 g liegt. Nach 28 Tagen wiegt Fischwirt Meier erneut dieselben Fische und errechnet ein Durchschnittsgewicht von 208 g. Berechnen Sie mit folgender Formel die Wachstumsrate W der Forellen mit durchschnittlichem Anfangsgewicht G_0 und dem durchschnittlichen Forellengewicht G_t nach t = 28 Tagen:

$$W = (exp(\ln(G_t) - \ln(G_0))/t) - 1$$

Aufgabe 4:
Die Wachstumsrate der Forellen fällt ab einem Gewicht von 400 g stark ab, weshalb es für Fischwirt Meier nicht rentabel ist, Forellen über dieses Gewicht hinaus zu halten. Bestimmen Sie mit dem neuen Anfangsgewicht von G_0 =208 g und dem Wert für die Wachstumsrate (W) aus Aufgabe 3, nach wie vielen Tagen die Forellen von Fischwirt Meier ein Durchschnittsgewicht von 400 g erreichen werden.

38. Forellenwachstum – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Aus der oben angegebenen Formel folgt:

$$\text{Futtermenge} = \text{Futterumsatzrate} \cdot \text{Wachstumszunahme}$$

Bei einer geringeren Futterumsatzrate benötigt man somit weniger Futter, um dasselbe Wachstum zu erwirken.

Lösung Aufgabe 2:

Das Preis-Leistungs-Verhältnis von Fischfutter kann bestimmt werden durch die Futterkosten für den Fischzuwachs von einem Kilogramm. Es gilt für eine Wachstumszunahme von 1 kg:

$$\text{Futtermenge} = \text{Futterumsatzrate} \cdot 1\,\text{kg}$$

Multipliziert man die Futtermenge mit dem kg-Futterpreis, so erhält man:

Bisheriges Futter: $1{,}2\,\text{kg} \cdot 1{,}29\,\frac{€}{\text{kg}} = 1{,}548\,€$

Premium-Kraftfutter: $0{,}9\,\text{kg} \cdot 1{,}73\,\frac{€}{\text{kg}} = 1{,}557\,€$

Das bisherige Futter war für den Fischzuwachs von einem Kilogramm um $0{,}9$ Cent preiswerter als das neue Premium-Kraftfutter. Dieser Unterschied ist sehr gering. Andere Faktoren, bspw. die wahrscheinlich gerundeten Futterumsatzraten, können den Unterschied zugunsten des einen oder des anderen Futters beeinflussen.

Lösung Aufgabe 3:

Es gilt $W = e^{\frac{\ln(208)-\ln(151)}{28}} - 1 = 0{,}0115$.
Die Fische haben also eine Wachstumsrate von $1{,}15\,\%$ pro Tag.

Lösung Aufgabe 4:

Es gilt $W = e^{\frac{\ln(G_t)-\ln(G_0)}{t}} - 1$ also $t = \frac{\ln(G_t)-\ln(G_0)}{\ln(1+W)} = \frac{\ln(400)-\ln(208)}{\ln(1{,}0115)} = 57{,}2$.

Die Forellen von Fischwirt Meier haben nach ca. 57 Tagen ein Durchschnittsgewicht von $400\,\text{g}$ erreicht.

38. Forellenwachstum – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein Fischwirt überprüft die exponentielle Gewichtszunahme seiner Fische.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus
4. Mögliche Schwierigkeiten: keine
5. Angesprochenes Berufsfeld: Fischwirt*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Biologie, Wirtschaft

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 2: Berechnen Sie für das Premium-Kraftfutter statt des bisherigen Futters jeweils die Futterkosten für den Fischzuwachs von einem Kilogramm.

Quellen:

https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogenforellenproduktion#F.C3.BCtterung
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://orgprints.org/16147/1/Reiter%26Wedekind_2009_F%C3%BCtterung_Bioforellen.pdf
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

IV. Erneuerbare Energien

39. Energie aus Abfall

Sie arbeiten in einer Werbeagentur als Mediengestalter*in Bild und Ton. Die Müllverbrennungsanlage Kiel hat Ihre Agentur damit beauftragt, eine Informationsbroschüre über die Anlage zu erstellen. Dafür hat sie Ihnen folgende Informationen über die Brennkammern und den Vorgang der Energiegewinnung zukommen lassen:

Die Müllverbrennungsanlage Kiel erzeugt aus der Verbrennung von Abfällen Strom und Fernwärme. Dazu wird der Müll in zwei große Brennkammern mit einem Fassungsvermögen von jeweils 8,75 t transportiert und bei knapp 1.000°C verbrannt. Im oberen Teil der Verbrennungsanlage befinden sich Rohre, die mit Wasser gefüllt sind. Durch die entsprechende Hitze verdampft das Wasser in den Rohren. Der entstehende Wasserdampf treibt beim Aufsteigen Turbinen an, sodass durch deren Bewegung Strom erzeugt wird.

- 2 Brennkammern mit einem Fassungsvermögen von jeweils 8,75 t pro Stunde
- Erzeugung von 43,75 MWh bei voller Auslastung
- Maximale Jahreskapazität von 140.000 t Abfall
- Abfall pro Person und Jahr in Deutschland: 580 kg, davon 69 % Restmüll
- Nur Restmüll kann für die Verbrennung verwendet werden.

39. Energie aus Abfall – Aufgaben

Ihre Aufgabe ist es nun, weitere Informationen für eine Broschüre herauszuarbeiten:

Aufgabe 1:

Die Stadt Kiel hat momentan ungefähr 246.000 Einwohner. Erstellen Sie eine Veranschaulichung, die die Jahreskapazität der Anlage mit der derzeitigen Auslastung vergleicht.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie, wie viele Megawattstunden (MWh) Strom die Müllverbrennungsanlage im Jahr durch den anfallenden Restmüll der Bevölkerung erzeugen kann, und stellen Sie einen Vergleich (z. B. mit einer Windkraftanlage) auf*.

*Hinweis: 1 kWh = 0,001 MWh

39. Energie aus Abfall – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

1. Möglichkeit (Vergleich maximale Abfallkapazität (140.000 t) mit derzeitiger Abfallmenge):
Für 246.000 Personen fallen jährlich etwa $246.000 \cdot 580\,\text{kg} \cdot 0{,}69 = 98.449{,}2\,\text{t}$ Abfall an.

2. Möglichkeit (Vergleich maximale Abfallkapazität mit derzeitiger Auslastung):
Die Anlage ist für maximal $\frac{140.000\,\text{t}}{0{,}69 \cdot 0{,}58\,\text{t}} = 349.825$ Personen ausgelegt.

Lösung Aufgabe 2:

- Abfall pro Jahr: $98.449{,}2\,\text{t}$
- Stündliches Fassungsvermögen der Brennkammern: $17{,}5\,\text{t}$
- Stromerzeugung pro Jahr: $\frac{98.449{,}2\,\text{t}}{17{,}5\,\text{t}} \cdot 43{,}75\,\text{MWh} = 246.248\,\text{MWh}$

Die durchschnittliche Nennleistung von Windenergieanlagen lag 2017 bei knapp 3 Megawatt, also bei $3 \cdot 365 \cdot 24 = 26.280\,\text{MWh}$ Strom pro Anlage und Jahr.
$\frac{245.335{,}4\,\text{MWh}}{26.280\,\text{MWh}} = 9{,}37$ Windenergieanlagen erzeugen damit etwa so viel Strom wie die Müllverbrennungsanlage Kiel.

39. Energie aus Abfall – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Eine Werbeagentur soll eine Broschüre für die Müllverbrennungsanlage Kiel erstellen.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, K6: Mathematisch Kommunizieren, L1: Zahl, L2: Messen
3. Vorwissen: Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: Überblick über die Fülle der angebotenen Informationen behalten
5. Angesprochenes Berufsfeld: Mediengestallter*in Digital und Print
6. Klassenstufe: Ab 7. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Physik, Chemie

Didaktischer Kommentar:

Eine Informationsbroschüre kann auch als Produkt einer Projektarbeit angefertigt werden.

Quellen:

http://www.mvkiel.de/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Stefan Schneider, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

40. Leistung einer Windenergieanlage

Die elektrische Leistung einer Windenergieanlage (WEA) wird von mehreren Faktoren bestimmt:

- Die Windgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Die von Rotorblättern überstrichene Fläche A, die in Abhängigkeit vom Radius der Rotorblätter mit $A = \pi \cdot r^2$ berechnet werden kann.
- Die Luftdichte ρ, welche bei 15°C einen Wert von 1,2 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ hat.
- Die Formel $P_W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$ gibt die Leistung einer WEA in Watt ($W = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$) an.

40. Leistung einer Windenergieanlage – Aufgaben

Aufgabe 1:

Aktuell eingesetzte WEA haben durchschnittlich einen Rotordurchmesser von etwa 100 m. Berechnen Sie die Windleistung einer solchen Anlage bei 15°C und einer Windgeschwindigkeit von 5 $\frac{m}{s}$ bzw. 10 $\frac{m}{s}$. Vergleichen Sie die beiden Werte.

Aufgabe 2:

Aus baurechtlichen Gründen können an manchen Orten nur kleinere WEA installiert werden. Berechnen Sie erneut die Windleistung bei 5 bzw. 10 $\frac{m}{s}$ und 15°C einer kleineren WEA mit 50 m Rotordurchmesser. Haben die Größe der Rotorblätter oder die Windgeschwindigkeit einen größeren Einfluss auf die Windleistung der WEA? Begründen Sie.

Aufgabe 3:

In der Projektierung eines Windparks müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden. Unter anderem spielt die Wirtschaftlichkeit des Parks eine zentrale Rolle. Dafür darf der Ertrag bzw. die erzeugte elektrische Leistung nicht zu gering sein. Welche Faktoren können beim Bau und Betrieb einer WEA beeinflusst werden, sodass eine möglichst hohe Windleistung erhalten bleibt?

Aufgabe 4:

Die verantwortliche Mechatronikerin möchte ein Windrad an einen Ort installieren, an dem eine mittlere Windgeschwindigkeit von 12 $\frac{m}{s}$ herrscht. Wie groß müssen die Rotorblätter sein, damit bei einer Temperatur von 15°C eine Leistung von 3 MW erreicht wird?

40. Leistung einer Windenergieanlage – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Für die Berechnung der Windleistung einer solchen WEA sind $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $r = \frac{100\,\text{m}}{2} = 50\,\text{m}$ und $v_1 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. $v_2 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gegeben.

$P_{W_5} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (50\,\text{m})^2 \cdot (5\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^3 = 589.048{,}62\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3} = 589.048{,}62\,\text{W} = 0{,}59\,\text{MW}$

$P_{W_{10}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (50\,\text{m})^2 \cdot (10\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^3 = 4.712.388{,}98\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3} = 4{,}71\,\text{MW}$

Bei doppelter Windgeschwindigkeit wird hier also die achtfache Windleistung erzielt.

Lösung Aufgabe 2:

Für $r = \frac{50\,\text{m}}{2} = 25\,\text{m}$ ergibt sich:

$P_{W_5} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (25\,\text{m})^2 \cdot (5\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^3 = 147.262{,}16\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3} = 147.262{,}16\,\text{W} = 0{,}15\,\text{MW}$ und

$P_{W_{10}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (25\,\text{m})^2 \cdot (10\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^3 = 1.178.097{,}25\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3} = 1{,}18\,\text{MW}.$

Auch hier verachtfacht sich die Windleistung bei doppelter Windgeschwindigkeit. Die Leistung ist bei halbem Rotorradius aber nur $\frac{1}{4}$. Der Radius geht in zweiter Potenz ($2^2 = 4$) in die Windleistungsformel ein, denn $P_W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi r^2 \cdot v^3$. Die Windgeschwindigkeit kommt in dritter Potenz ($2^3 = 8$) in der Formel vor und hat damit einen größeren Einfluss auf die Windleistung als der Radius der Rotorblätter.

Lösung Aufgabe 3:

Beeinflussbare Faktoren:

- Fläche, die vom Rotor überstrichen wird (Länge der Rotorblätter); baurechtliche, physikalische und technische Einschränkungen
- Windgeschwindigkeit, bedingt insbesondere durch den Standort der WEA; hierfür hilfreich: Windindex (Internetrecherche)
- Temperatur, ebenfalls standortbedingt

Lösung Aufgabe 4:

Mit $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $P_W = 3\,\text{MW}$ und $v = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich $r^2 = \frac{P_W}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\pi\cdot v^3} = \frac{3.000.000\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3}}{\frac{1}{2}\cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\pi\cdot(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^3} = 921{,}04\,\text{m}^2$, also ein Rotorblattradius von $r = \sqrt{921{,}04\,\text{m}^2} = 30{,}35\,\text{m}$.

40. Leistung einer Windenergieanlage – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Die Leistung von Windenergieanlagen wird berechnet.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Potenzieren
4. Mögliche Schwierigkeiten: Umrechnung der physikalischen Einheiten
5. Angesprochenes Berufsfeld: Mechatroniker*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Physik, Erdkunde

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ 1 MW (= 1 Megawatt) = 1.000.000 Watt

▲ Zu Aufgabe 2: Berechnen Sie auch die Windleistung bei verschiedenen Temperaturen (Recherche nötig) und vergleichen Sie.

▲ Zu Aufgabe 4: Windgeschwindigkeit selbst recherchieren

Quellen:

https://iwer.info/article/Sonstiges/Windleistung-Windenergie-berechnen/index.html
[letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von David Baalmann, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

41. Müllzusammensetzung

Der Auszubildende zum Energieberater Tom erhält von seiner Chefin einen Recherche-Auftrag für eine Informationsbroschüre zum Thema „Müll in der Stadt Kiel". Hierzu soll er folgende Werte ermitteln:

1. Durchschnittliche tägliche Müllproduktion (gesamt und pro Person)
2. Jährliche Menge an recyceltem Glas (gesamt und pro Person)
3. Jährliche Menge an Müll, die zur Energiegewinnung genutzt wird
4. Anteil von 3. am gesamten Müll
5. Plastik- und Restmüll-Anteil bei 3.

Im Internet findet Tom den folgenden Informationstext:

> Die Einwohner*innen in Kiel produzieren durchschnittlich 580 kg Müll pro Jahr und Person. Der Müll wird zu einem großen Anteil in der Müllverbrennungsanlage Kiel für die Erzeugung von Strom und Fernwärme verwendet.
> Von den 580 kg Abfall sind ca. 69 % Restmüll, der zur Energiegewinnung genutzt werden kann. Die restlichen 31 % sind schon von den Einwohner*innen getrennt worden. Davon sind 22 % Glasmüll und 13 % Plastikmüll. 85 % des Glasmülls können zu 100 % recycelt werden. 25 % des Plastikmülls können zusätzlich zur Energiegewinnung verwendet werden. Die Energieeffizienz liegt bei 73 %. Das heißt, 73 % der im Abfall enthaltenen Energie werden in Strom und Wärme umgewandelt.

41. Müllzusammensetzung – Aufgaben

Aufgabe 1:

Helfen Sie dem Auszubildenden zum Energieberater Tom bei der Ermittlung der Werte für die Informationsbroschüre.

41. Energie aus Abfall – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Ende 2018 hatte die Stadt Kiel ca. 247.500 Einwohner*innen.

1. Durchschnittliche tägliche Müllproduktion, pro Person: $\frac{580\,\mathrm{kg}}{365{,}25} = 1{,}59\,\mathrm{kg}$

   Durchschnittliche tägliche Müllproduktion, gesamt:
   $\frac{580\,\mathrm{kg}}{365{,}25} \cdot 247.500 = 393.018{,}49\,\mathrm{kg} = 393{,}02\,\mathrm{t}$

2. Jährliche Menge an recyceltem Glas, pro Person: $580\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}85 = 33{,}62\,\mathrm{kg}$

   Jährliche Menge an recyceltem Glas, gesamt:
   $33{,}62\,\mathrm{kg} \cdot 247.500 = 8.321.593{,}5\,\mathrm{kg} = 8.321{,}59\,\mathrm{t}$

3. Jährliche Menge an Müll, die zur Energiegewinnung genutzt wird:
   $247.500 \cdot 0{,}58\,\mathrm{t} \cdot (0{,}69 + 0{,}31 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}25) = 100.495\,\mathrm{t}$

4. Anteil von 3. am gesamten Müll: $\frac{100.495\,\mathrm{t}}{0{,}58\,\mathrm{t} \cdot 247.500} = 0{,}7 = 70\,\%$

5. Restmüll-Anteil: $\frac{0{,}69}{0{,}7} = 0{,}9857 = 98{,}57\,\%$

   Plastik-Anteil: $\frac{0{,}01}{0{,}7} = 0{,}0143 = 1{,}43\,\%$

41. Müllzusammensetzung – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein angehender Energieberater recherchiert zum Thema „Müll in der Stadt Kiel".
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl
3. Vorwissen: Prozentrechnung
4. Mögliche Schwierigkeiten: Ermittlung der Einwohner*innen-Zahl von Kiel
5. Angesprochenes Berufsfeld: Energieberater*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: keine

Differenzierungsmöglichkeiten:

▲ Zusatzaufgabe: Berechnen Sie (mit entsprechender Recherche), wie viel Strom mit dem Müll tatsächlich erzeugt werden kann.

Didaktischer Kommentar:

Je nach verwendeter Zahl für die Einwohner*innen der Stadt Kiel variieren die ermittelten Werte leicht. Das sollte der Chefin von Tom mitgeteilt werden.

Quellen:

https://www.mvkiel.de/energie [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://de.wikipedia.org/wiki/Glas-Recycling [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://de.wikipedia.org/wiki/Verwertung_von_Kunststoffabf%C3%A4llen [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Stefan Schneider, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

42. Heizwert

Verbrennt man Brennstoff, so wird Energie frei. Der Heizwert gibt an, wie viel Energie pro Maßeinheit genutzt werden kann. Er wird dabei in kWh/kg, kWh/l oder kWh/m^3 angegeben. Je nach Brennstoff unterscheiden sich Heizwerte und Kosten erheblich (siehe Tabelle):

Brennstoff	Heizwert	Kosten
Holz	4,1 kWh/kg	0,13 €/kg
Koks	8,1 kWh/kg	0,64 €/kg
Heizöl	11,8 kWh/l	0,54 €/l
Erdgas	10,4 kWh/m^3	0,64 €/m^3
Propan	6,83 kWh/l	0,41 €/l

Sie sind in der Energieberatung tätig und beraten die Familie Hansen, die energiesparende Maßnahmen an ihrem Haus vornehmen möchte. Der Energiebedarf zum Heizen des Einfamilienhauses aus dem Jahr 1973 beträgt 39.600 kWh pro Jahr. Dieser Bedarf wird dabei zur Hälfte durch eine Heizungsanlage, die mit Erdgas betrieben wird, und zur anderen Hälfte durch einen Kachelofen, in dem Holz verbrannt wird, abgedeckt.

42. Heizwert – Aufgaben

Aufgabe 1:

Verschaffen Sie sich einen Überblick über die momentanen Heizkosten der Familie Hansen.

Aufgabe 2:

Familie Hansen möchte ihren Energiebedarf zum Heizen in Zukunft nur noch durch einen Brennstoff aus Tabelle 1 abdecken und hofft, so Geld und Arbeit zu sparen. Beraten Sie Familie Hansen, welcher Brennstoff sich am besten für sie eignet und begründen Sie Ihre Entscheidung. Erläutern Sie der Familie praktische Vor- und Nachteile, die einige Brennstoffe mit sich bringen.

Aufgabe 3:

Um ihre Energiekosten zu senken, hatte sich Familie Hansen über eine Sanierung ihres Hauses informiert. Eine Sanierung des Daches, der Fenster und der Außenwände würde zusammen mit der Umstellung auf Heizöl als alleinigen Brennstoff 28.600 € kosten. Der Energiebedarf würde durch diese Maßnahmen jedoch um 49 % sinken. Würden Sie als Berater*in der Familie eine Sanierung zu diesen Konditionen empfehlen?

42. Heizwert – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Jährlicher Energieverbrauch Erdgasanlage: $\frac{39.800\,\text{kWh}}{2} = 19.800\,\text{kWh}$

Notwendige Menge Erdgas: $\frac{19.800\,\text{kWh}}{10{,}4\,\frac{\text{kWh}}{\text{m}^3}} = 1.903{,}85\,\text{m}^3$

Kosten für Erdgas: $1.903{,}85\,\text{m}^3 \cdot 0{,}64\,\frac{€}{\text{m}^3} = 1.218{,}46\,€$

Jährlicher Energieverbrauch Kachelofen: $\frac{39.800\,\text{kWh}}{2} = 19.800\,\text{kWh}$

Notwendige Menge Holz: $\frac{19.800\,\text{kWh}}{4{,}1\,\frac{\text{kWh}}{\text{kg}}} = 4.829{,}27\,\text{kg}$

Kosten für Holz: $4.829{,}27\,\text{kg} \cdot 0{,}13\,\frac{€}{\text{kg}} = 627{,}81\,€$

Gesamtenergiekosten pro Jahr: $1.218{,}46\,€ + 627{,}81\,€ = 1.846{,}27\,€$

Lösung Aufgabe 2:

Wenn die Familie auf einen Brennstoff umstellt, so ergeben sich im Jahr jeweils folgende Kosten:

Holz: $\frac{39.600\,\text{kWh}}{4{,}1\,\frac{\text{kWh}}{\text{kg}}} \cdot 0{,}13\,\frac{€}{\text{kg}} = 9.658{,}54\,\text{kg} \cdot 0{,}13\,\frac{€}{\text{kg}} = 1.255{,}61\,€$

Koks: $\frac{39.600\,\text{kWh}}{8{,}1\,\frac{\text{kWh}}{\text{kg}}} \cdot 0{,}64\,\frac{€}{\text{kg}} = 4.888{,}89\,\text{kg} \cdot 0{,}64\,\frac{€}{\text{kg}} = 3.128{,}89\,€$

Heizöl: $\frac{39.600\,\text{kWh}}{11{,}8\,\frac{\text{kWh}}{\text{l}}} \cdot 0{,}54\,\frac{€}{\text{l}} = 3.355{,}93\,\text{l} \cdot 0{,}54\,\frac{€}{\text{l}} = 1.812{,}20\,€$

Erdgas: $\frac{39.600\,\text{kWh}}{10{,}4\,\frac{\text{kWh}}{\text{m}^3}} \cdot 0{,}64\,\frac{€}{\text{m}^3} = 3.807{,}69\,\text{m}^3 \cdot 0{,}64\,\frac{€}{\text{m}^3} = 2.436{,}92\,€$

Propan: $\frac{39.600\,\text{kWh}}{6{,}83\,\frac{\text{kWh}}{\text{l}}} \cdot 0{,}41\,\frac{€}{\text{l}} = 5.797{,}95\,\text{l} \cdot 0{,}41\,\frac{€}{\text{l}} = 2.377{,}16\,€$

Mögliche Bewertungskriterien:

- Heizen mit Holz ist am günstigsten, setzt aber Anwesenheit voraus (Holz nachlegen).
- Heizen mit Heizöl verursacht zunächst Umrüstungskosten (andere Brennstoffe auch).
- Heizen mit Erdgas ist im Jahr gut 600 € teurer als alleiniges Heizen mit Heizöl.
- Lagerkosten (Holz, Heizöl, Propan)
- Umrüstungskosten
- Verfügbarkeit
- Umweltfreundlichkeit (ggf. Auflagen)

Lösung Aufgabe 3:

Energiebedarf nach der Sanierung: $0{,}51 \cdot 39.600\,\text{kWh} = 20.196\,\text{kWh}$

Energiekosten pro Jahr (Heizöl): $\frac{20.196\,\text{kWh}}{11{,}8\,\frac{\text{kWh}}{\text{l}}} \cdot 0{,}54\,\frac{€}{\text{l}} = 1.711{,}53\,\text{l} \cdot 0{,}54\,\frac{€}{\text{l}} = 924{,}23\,€$

(Alternativ mit Aufgabe 2: $1.812{,}2\,€ \cdot 0{,}51 = 924{,}22\,€$)

Jährliche Energiekosten-Ersparnis durch die Sanierung: $1.846{,}27\,€ - 924{,}23\,€ = 922{,}04\,€$

Die Umrüstungskosten wären bei gleichbleibenden Energieausgaben und –verbrauch nach

$$\frac{28.600€}{922{,}04\,\frac{€}{\text{Jahr}}} = 31{,}02 \text{ Jahren gedeckt.}$$

Zusätzlich sollte Familie Hansen auch den Umweltaspekt bedenken. Hierzu könnten zusätzlich CO_2-Bilanzen der verschiedenen Brennstoffe verglichen werden.

42. Heizwert – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein*e Energieberater*in berät eine Familie bei der Sanierung ihres Hauses.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, K2: Probleme mathematisch lösen, K4: Mathematische Darstellungen verwenden, L1: Zahl
3. Vorwissen: Prozentrechnung, Dreisatz
4. Mögliche Schwierigkeiten: Schüler*innen kennen nicht unbedingt die Vor- und Nachteile verschiedener Brennstoffe.
5. Angesprochenes Berufsfeld: Energieberater*in
6. Klassenstufe: Ab 8. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Erdkunde

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Zu Aufgabe 1: Berechnen Sie zuerst, wie viel kg Holz und Liter Heizöl Familie Hansen jedes Jahr benötigt, und geben ebenfalls die Kosten für die Brennstoffe an.

▲ Zu Aufgabe 3: Finden Sie heraus, nach wie vielen Jahren die Kosten der Sanierung durch die Einsparung des Energiebedarfs abgedeckt sind, und diskutieren Sie, ob sich eine Sanierung für Familie Hansen lohnen würde.

Didaktischer Kommentar:

Es sollte eine sinnvolle Begründung für oder gegen die Sanierung des Hauses erbracht werden.

Quellen:

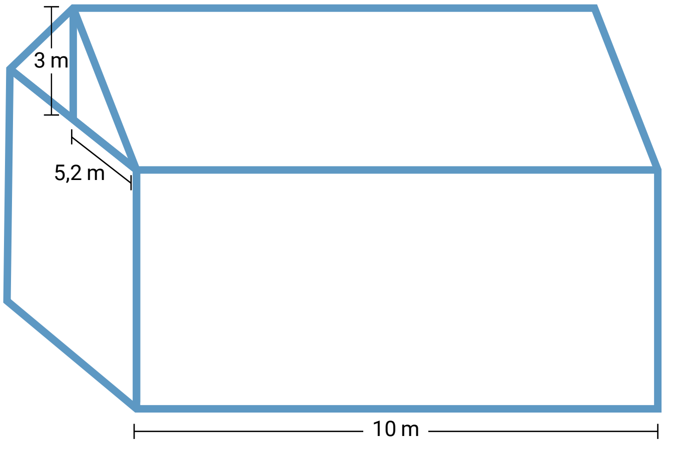
https://application.effizienzhaus-online.de/sanierungsrechner/#?state=0
[letzter Zugriff: 10.05.2020]
Albers, J., Dommerl, R., Montaldo-Ventsam, H., Pusch, P. & Wagner, J. (2015). Fachkenntnisse 2 - Anlagemechaniker SHK Lernfelder 9-15 (2., aktualisierte Auflage). Hamburg: Verlag Handwerk und Technik GmbH.

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Stefan Schneider, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

43. Solarmodule am Hausdach

Sie sind zertifizierte Energieberaterin oder Energieberater und geben Unterstützung bei der Planung von Solaranlagen an Privathäusern. Familie Andresen aus Leck interessiert sich für den Kauf einer Solaranlage für das Dach ihres geplanten Eigenheims und bittet Sie um ein Beratungsgespräch. Sie haben sich bereits über verschiedene Angebote informiert. Ihre Wahl ist auf polykristalline Solarmodule gefallen, die inklusive Montage für 289 € je Modul zu erhalten wären. Die Maße der Module sind 1.640 mm x 990 mm. Zusätzlich würden jährlich laufende Kosten in Höhe von geschätzt 500 € für die Wartung, Instandhaltung, Versicherung und Betrieb anfallen.

Familie Andresen teilt Ihnen die Maße ihres geplanten Hauses mit. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu und zeigt die Südseite (Sonnenseite) des Hauses:



43. Solarmodule am Hausdach – Aufgaben

Aufgabe 1:

Die optimale Dachneigung für Solaranlagen ist abhängig vom Breitengrad. In Deutschland liegt sie zwischen 28° und 30°, in Schleswig-Holstein bei 30°. Prüfen Sie, ob das Hausdach einen optimalen Neigungswinkel hat.

Aufgabe 2:

Ermitteln Sie die maximale Anzahl an Solarmodulen, die auf der Südseite des Hauses angebracht werden können.

Aufgabe 3:

Je m^2 erbringt die Solaranlage bei optimaler Dachneigung etwa 140 kWh (Kilowattstunden) pro Jahr. Für jede selbsterzeugte kWh spart Familie Andresen 30,9 Cent im Vergleich zum fremderzeugten Strom. Beraten Sie Familie Andresen, nach wie vielen Jahren die Investitionen in die Solaranlage durch die Stromersparnis gedeckt werden.

43. Solarmodule am Hausdach – Lösung

Lösung Aufgabe 1:

Bezeichnet α den Neigungswinkel des Hausdachs, so ist mit den Werten aus der Skizze $\tan(\alpha) = \frac{3\,\mathrm{m}}{5{,}2\,\mathrm{m}} = 0{,}577$, also $\alpha = \tan^{-1}(0{,}577) = 30°$. Das geplante Dach hat also einen für die Solaranlage optimalen Neigungswinkel.

Lösung Aufgabe 2:

Die schräge Dachfläche hat nach der Skizze eine Breite von $10\,\mathrm{m}$ und mit dem Satz des Pythagoras eine Höhe von $h = \sqrt{(3\,\mathrm{m})^2 + (5{,}2\,\mathrm{m})^2} = 6\,\mathrm{m}$.

1. Möglichkeit:
Ordnet man die Solarmodule mit der längeren Seite horizontal an, so passen $\frac{10}{1{,}64} = 6{,}1$, also 6 Module neben- und $\frac{6}{0{,}99} = 6{,}06$, also 6 Module übereinander. Insgesamt passen dann also $6 \cdot 6 = 36$ Module auf die Dachfläche.

2. Möglichkeit:
Ordnet man die Module mit der kürzeren Seite horizontal an, so passen zunächst 30 Module auf die Dachfläche. Es bleibt zusätzlich ein Streifen von $10\,\mathrm{m} \cdot 1{,}08\,\mathrm{m}$ frei, auf dem weitere 6 Module quer angebracht werden könnten, sodass auch bei dieser Anordnung 36 Module auf das Dach passen würden.

Lösung Aufgabe 3:

- Anschaffungskosten für Solarmodule: $36 \cdot 289\,€ = 10.404\,€$
- Gesamtfläche der Module: $36 \cdot 0{,}99\,\mathrm{m} \cdot 1{,}64\,\mathrm{m} = 58{,}45\,\mathrm{m}^2$
- Ersparnis pro Jahr: $58{,}45\,\mathrm{m}^2 \cdot 140\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}309\,€ - 500\,€ = 2.028{,}55\,€$
- Anzahl Jahre bis Deckung: $\frac{10.404}{2.028{,}55} = 5{,}13$

Die Investition in die Solaranlage rechnet sich für Familie Andresen also nach etwas mehr als 5 Jahren. Dabei ist zu bedenken, dass die Stromkosten in den letzten Jahren tendenziell angestiegen sind. Sollte sich dieser Trend fortsetzen, könnten die Einsparungen noch höher ausfallen. Die Investition wären dann früher/schneller gedeckt.

43. Solarmodule am Hausdach – Kommentar

Beschreibung:

1. Kontext: Ein*e Energieberater*in stellt verschiedene geometrische und wirtschaftliche Überlegungen zur Installation einer Solaranlage auf.
2. Bezug zu den Fachanforderungen Mathematik: K1: Mathematisch argumentieren, K2: Probleme mathematisch lösen, L1: Zahl, L2: Messen, L3: Raum und Form, L4: Funktionaler Zusammenhang
3. Vorwissen: Trigonometrische Funktionen, Satz des Pythagoras
4. Mögliche Schwierigkeiten: Anordnung der Solarmodule in Aufgabe 2
5. Angesprochenes Berufsfeld: Energieberater*in
6. Klassenstufe: Ab 10. Klasse
7. Bezug zu anderen Fächern: Physik

Differenzierungsmöglichkeiten:

▼ Die optimale Orientierung der Solarmodule (längere Seite horizontal ausrichten) kann für Aufgabe 2 vorgegeben werden.

▲ In die Planungen des Hausdachs können auch ein oder zwei Fenster einbezogen werden (Maße: 80x100cm).

Quellen:

http://www.photovoltaik.org/betrieb/photovoltaik-kosten [letzter Zugriff: 10.05.2020]
http://www.renewable-energy-concepts.com/german/sonnenenergie/basiswissen-solarenergie/dachneigung-sonnenstand.html [letzter Zugriff: 10.05.2020]
https://www.stromauskunft.de/strompreise/was-kostet-strom/ [letzter Zugriff: 10.05.2020]

Diese Aufgabe entstand unter Mitarbeit von Dennis Fomin, Robert von Hering, Aiso Heinze & Anke Lindmeier.

Impressum

Das PANaMa-Projekt – Vernetzung von Schule und Arbeitswelt
Bd. 4 Mathematik im beruflichen Kontext / Matematik i en professionel sammenhæng

Hrsg. Stefanie Herzog, Marc Wilken / Projekt PANaMa
www.panama-project.eu
ISBN 978-3-89088-300-7

Autoren: David Baalmann, Kai Bertallot, Christopher Ernsting, Dennis Fomin, Aiso Heinze, Robert v. Hering, Stefanie Herzog, Anke Lindmeier, Ines Niebuhr, Inken Saggau, Stefan Schneider, Tobias Sildatke
Übersetzung: R. Marquardt
Design / Layout: amatik Designagentur, Kiel
Druck: Neue Nieswand Druck GmbH Druckerei, Kiel
Auflage: 500 Exemplare

Olshausenstr. 62, 24118 Kiel, Deutschland

Postadresse: IPN, D-24098 Kiel
www.ipn.uni-kiel.de

Diese Publikation wird gefördert mit Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklung.
Dette bogudgivelse finansieres af midler fra Den Europæiske Fond for Regionaludvikling.