

Dichte¹

Gegeben

Auszug aus dem Märchen "Hans im Glück" der Gebrüder Grimm:

"Hans hat sieben Jahre bei seinem Herrn gedient, da sprach der zu ihm: "Herr, meine Zeit ist herum, nun wollte ich gern wieder heim zu meiner Mutter, gebt mir meinen Lohn." Der Herr antwortete: "Du bist mir treu und ehrlich gewesen: wie der Dienst war, so soll der Lohn sein", und gab ihm ein Stück Gold, das so gross als Hansens Kopf war. Hans zog sein Tüchlein aus der Tasche, wickelte den Klumpen hinein, setzt ihn auf die Schulter und machte sich auf den Weg nach Hause."

Aufgabe

Finde heraus wie viel Wert dieser Goldklumpen hat.

Volumen des Goldklumpens

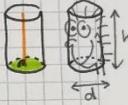
Kopf als Kugel

$$u = 58 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{gemessen}$$
$$u = 2\pi r \quad \rightarrow \text{Formelbuch}$$
$$r = \frac{u}{2\pi}$$
$$r = \frac{58 \text{ cm}}{2 \cdot 3.14} = 9.2356 \dots \text{ cm} \approx 0.92 \text{ dm}$$


$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \rightarrow \text{Formelbuch}$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 0.92^3 \approx 3.3 \text{ dm}^3$$

Kopf als Zylinder

$$V_{\text{Zylinder}} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$
$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V_{\text{Zylinder}} = 3.14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h$$
$$V_{\text{Zylinder}} = 3.14 \cdot \left(\frac{1.7 \text{ dm}}{2}\right)^2 \cdot 1.6 \text{ dm} = 3.6 \text{ dm}^3$$


Diese Werte variieren je nach gewählter Formel. Der Wert sollte zwischen 3.3 - 5.0 dm³ liegen.

Masse berechnen

Die Dichte von Gold ist ca. 19.29 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Es gilt die Formel $\text{Masse} = \text{Dichte} \cdot \text{Volumen}$

$$[\text{kg}] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right] \cdot \text{dm}^3$$
$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 19.29 \cdot V_{\text{Kugel}}$$
$$m = 19.29 \cdot 3.3$$
$$m \approx 63.66 \text{ kg}$$

Wert Goldklumpen

Wir haben die Masse $m \approx 63.66 \text{ kg}$. Jetzt müssen wir wissen wie teuer 1kg Gold ist.

Goldpreis ca. 41'140.41 $\frac{\text{CHF}}{\text{kg}}$

$$\text{Preis} = \text{Goldpreis} \cdot \text{Masse}$$
$$\text{Preis} = 41'140.41 \cdot 63.66$$
$$\text{Preis} \approx 2'618'998.5 \text{ CHF}$$

Der Goldklumpen hätte einen Wert von ca. 2.6 Mio. CHF.

¹ <https://www.leifiphysik.de/mechanik/masse-volumen-und-dichte/aufgaben#lightbox=/themenbereiche/masse-volumen-und-dichte/lb/hans-im-glueck?v=1>



Dichte: **Tipp 1** (Vorgehen)

Schätze die Volumen des Goldklumpens, den Hans als Lohn bekam, vernünftig ab. Nimm dabei an, dass Hans ein Bursche von ca. 15 Jahren war, der eine normale Kopfgrösse hatte.

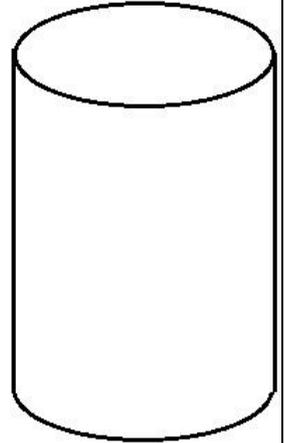
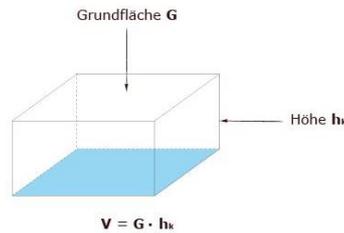
Wenn du keine Idee hast, wie du das Volumen des Kopfes bestimmen kannst, so hole dir den nächsten Tipp ab.

Dichte: **Tipp 2** (Volumen)

Zuerst musst du das Volumen des Goldklumpens herausfinden. Dieses Volumen ist gleich gross wie die eines Kopfes. Gehe davon aus, dass der Kopf geformt ist wie ein Zylinder.

Du brauchst nun die Formel für die Berechnung eines Zylinders. Wie könnte die aussehen?

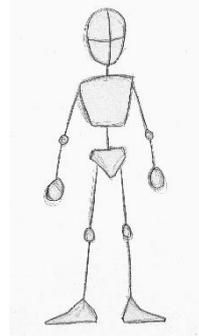
Eventuell hilft dir die Berechnung des Volumens eines Quaders (siehe Bild rechts).



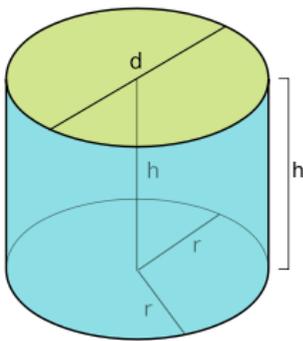
Dichte: **Tipp 3** (Volumen berechnen)

Um das Volumen berechnen zu können, brauchst du die Grundfläche und die Höhe eines Zylinders (wir gehen davon aus, dass der Kopf vereinfacht diese Form hat). Die Formel findest du unten in der Grafik. **Hinweis:** Die in diesen Formeln auftretende Grösse π hat ungefähr den Wert 3.14.

Miss mit einem Lineal den Durchmesser und die Höhe des Kopfes einer Person (hier sind natürlich je nach Kopf deutliche Unterschiede möglich). Wandle die Grössen alle in die Einheit dm um, z.B. 10cm = 1dm.



Der Zylinder



- Durchmesser $d = 2 \cdot r$
- Umfang $u = 2 \cdot \pi \cdot r$
- Grundfläche $G = \pi \cdot r^2$
- Mantelfläche $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- Oberfläche $O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
 $O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$
- Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Dichte: **Tip 4** (Masse berechnen)

Du weisst jetzt, wie gross der Goldklumpen ist und hast das Volumen mit der Formel $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$ berechnet.

Schaue dass die Einheit dm^3 ist.

Um die Masse zu berechnen, musst du wissen, wie schwer z.B. 1dm^3 Gold ist. Dazu brauchst du die sogenannte Dichte. Die Dichte gibt an, welche Masse ein dm^3 eines Stoffes hat. Diesen Wert kann man in einem Formelbuch herauslesen (siehe Grafik rechts).

Um die Masse zu berechnen, brauchst du die Formel unten (du musst sie noch etwas umformen).

Material	kg/dm ³	-	g/mm ³
Aluminium	2,75	Al	0.00275
Bronze	8,45	CuSn	0.00845
Blei	11,34	Pb	0.01134
Edelstahl	7,85	VA	0.00785
Gold	19,29	Au	0.01929
Gusseisen	7,25	Guss	0.00725
Kupfer	8,93	Cu	0.00893
Magnesium	1,89	Mg	0.00189
Messing	8,50	CuZn	0.0085
Queckilber	13,6	Hg	0.0136
Silber	10,5	Ag	0.0105
Stahl	7,85	St	0.00785
Titan	4,50	Ti	0.0045
Zink	7,14	Zn	0.00714
Zinn	7,29	Sn	0.00729
ABS/PS/SB	1,05	ABS/PS/SB	0.00105
Gummi allgemein	1,10	Gummi	0.0011
Polypropylen	0,91	PP	0.00091
Polystyrol	1,12	PS	0.00112

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$
$$\rho = \frac{m}{V}$$

Einheit für die Dichte $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{ml}}$ oder $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Dichte: **Tip 5** (Wert des Goldklumpen berechnen)

Du weisst jetzt die Masse des Goldklumpen. Jetzt musst du noch wissen, wie teuer Gold ist.

Kilogramm Preis von Gold: $41'140.41 \frac{\text{CHF}}{\text{kg}}$

Visualisierung

Gegeben

Um etwas Geld in deiner Freizeit zu verdienen, eröffnest du mit einem Freund ein kleines Geschäft. Ihr wollt selbstgemachte Weihnachtsguetzli nach Grossmutter's Geheimrezept backen und diese auf dem Schulhausplatz verkaufen. Ihr seid in kürzester Zeit so erfolgreich, dass ihr euch eine grosse Ausstechmaschine kauft.

Folgende Kosten werden auf euch zukommen

Maschinenstundensatz² ohne Bedienungsperson $20.00 \frac{\text{CHF}}{\text{h}}$

Maschinenstundensatz mit Bedienungsperson³ $36.00 \frac{\text{CHF}}{\text{h}}$

Einrichtzeit pro Auftrag 30 Minuten

Maschinenlaufzeit pro 100 Guetzli 60 Sekunden

$$= 100 \frac{\text{Guetzli}}{\text{Min.}} = 100 \cdot 60 \frac{\text{Guetzli}}{\text{h}} = 6000 \frac{\text{Guetzli}}{\text{h}}$$

Aufgabe

Berechne die Herstellungskosten von einer Guetzlimenge ohne die Rohmaterialkosten, für die Mengen 1000, 5000 und 10'000 Guetzli.

Überlege dir wie du das Ganze sinnvoll in einer Tabelle einfügen könntest.

Anzahl Guetzli	Kosten Maschine ohne Bedienung	Kosten Maschine mit Bedienungspers.	Total
1000	$\frac{\text{Anzahl Guetzli}}{6000 \frac{\text{Guetzli}}{\text{h}}} \cdot 20.00 \frac{\text{CHF}}{\text{h}}$ = 3.35 CHF	$36.00 \frac{\text{CHF}}{\text{h}} \cdot 0.5 \text{ h (30 Min.)}$ = 18 CHF	21.35 CHF
5000	16.70 CHF	18 CHF	34.70 CHF
10'000	33.35 CHF	18 CHF	51.00 CHF

² Um die Kosten der Teigmaschine abzudecken, müsst ihr diese miteinbeziehen

³ Damit bezahlt ihr den Lohn der Helferinnen und Helfer

Amortisation

Um etwas Geld in deiner Freizeit zu verdienen, eröffnest du mit einem Freund ein kleines Geschäft. Ihr wollt selbstgemachte Muffins nach Grossmutter's Geheimrezept backen und diese auf dem Schulhausplatz verkaufen.

Ihr spart schon seit geraumen Zeit, um diese Idee umzusetzen. Was wirst du alles kaufen müssen? Was könnte sonst noch alles Kosten verursachen? Gehe davon aus, dass du die Küche und Infrastruktur deiner Eltern benutzen darfst.

Zutaten, Material (Förmli, Maschinen),

Lohn für HelferInnen,

Strom (wahrscheinlich bezahlen das aber die Eltern)

Leider besitzen deine Eltern keine Maschine. Pro Tag könnt ihr 20 Muffins herstellen. Ihr überlegt euch, dass ihr in der gleichen Zeit 40 Muffins mit einer Maschine herstellen könntet.

	
<p>Kosten: keine</p>	<p>Kosten 360 CHF</p>
<p>Leistung: $20 \frac{\text{Muffins}}{\text{Tag}}$</p>	<p>Leistung: $40 \frac{\text{Muffins}}{\text{Tag}}$</p>

Die Frage ist nun, ob es sich lohnt eine Maschine zu kaufen. Ihr könntet während einer Pause 40 Muffins für insgesamt 156.00 CHF verkaufen. Darin enthalten sind folgende Fixkosten pro Muffin: Zutaten 1.90 CHF, Material 0.10 CHF, Lohn 1.00 CHF⁴.

Wie viele Tage braucht ihr, bis ihr die Maschine bezahlt habt?

Pro Tag kann folgendes für die Maschine zurückgelegt werden

$$156.00 \text{ CHF} - 40 * (1.90 \text{ CHF} + 0.10 \text{ CHF} + 1.00 \text{ CHF}) = 36 \frac{\text{CHF}}{\text{Tag}}$$

$$\text{Amortisationsdauer} = \frac{360 \text{ CHF}}{36 \frac{\text{CHF}}{\text{Tag}}} = 10 \text{ Tage}$$

Du hast jetzt die Amortisationsdauer berechnet. Lies den folgenden Text zum Thema Amortisation durch.

⁴ Mit dem Lohn bezahlt ihr alle HelferInnen, z.B. eure MitschülerInnen, welche die Muffins verkaufen

Amortisation ist der Vorgang, dass man das Geld, das man für die Anschaffung von etwas ausgegeben hat, durch Gewinne zurückbekommt.

Kauft ein Unternehmen eine Maschine, so muss dafür Kapital aufgewendet werden. Zum Beispiel 5'000'000.00 CHF. Der Unternehmer bindet also einerseits Kapital in dieser Investition, gleichzeitig generiert diese Investition aber vom Zeitpunkt der Anschaffung an bereits Gewinne. Erreichen diese Gewinne 5'000'000.00 CHF, also den Preis der Maschine, dann hat sich die Investition amortisiert.⁵

Der Zeitraum, innerhalb dessen sich die Investition amortisiert, nennt man Amortisationsdauer.

Unser Beispiel:

Angenommen, unsere Maschine generiere einen Gewinn von 2'500'000 CHF im Jahr, dann hätte sich diese Investition in 2 Jahren amortisiert ($\frac{5'000'000 \text{ CHF gebundenes Kapital}}{2'500'000 \text{ CHF pro Jahr}} = 2$ Jahre).

Zusatzaufgabe

Während einem Monat verkauft ihr während den Pausen eure Muffins. Was lohnt sich finanziell mehr, die Maschine anzuschaffen oder die Muffins weiterhin von Hand zu machen?

Wie viel verdient man **ohne die Maschine**?

Es können nur 20 Muffins gebacken und damit 78 CHF pro Tag eingenommen werden.

Pro Tag gibt das einen Gewinn von

$$\underline{78.00 \text{ CHF} - 20 * (1.90 \text{ CHF} + 0.10 \text{ CHF} + 1.00 \text{ CHF}) = 18 \frac{\text{CHF}}{\text{Tag}}}$$

Wir gehen davon aus, dass ein Monat 30 Tage hat. Nur unter der Woche können die

Muffins verkauft werden. Das sind ca. 21 Tage ($30/7*5=21.42857\dots$ Wochentage)

In einem Monat verdient man ohne die Maschine 21 Tage * 18 $\frac{\text{CHF}}{\text{Tag}}$ = 378 CHF

Verdienst **mit der Maschine**

Während den ersten 10 Tagen verdient ihr nichts, da ihr damit die Maschine abbezahlt.

Es bleiben 21Tage-10Tage= 11 Tage, wo ihr damit Geld verdienen könnt.

$$\underline{36 \frac{\text{CHF}}{\text{Tag}} * 11 \text{ Tage} = 396 \text{ CHF} \rightarrow \text{mit der Maschine verdient man in einem Monat 18CHF}$$

mehr.

⁵ <http://www.unternehmerlexikon.de/amortisation/>

Amortisation: **Tipp 1** (Vorgehen)

Du musst dir die Frage stellen, wie viel Geld bleibt von diesen 40 Muffin übrig, wenn du die Fixkosten davon abziehst.

Wie kannst du das ausrechnen?

Amortisation: **Tipp 2** (Amortisationsdauer)

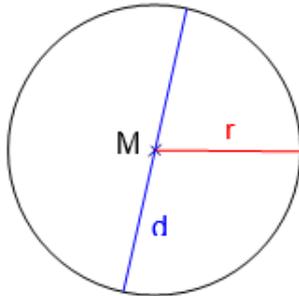
Du hast jetzt berechnet, wie gross der Gewinn eines Muffins ist. Wie viele Tage brauchst du, bis du den Preis der Maschine erreicht hast.

Amortisation: **Tipp 3** (ohne Maschine)

Rechne aus, wie viel du ohne die Maschine verdienst. Achtung: Du kannst nur 20 Muffins pro Tag produzieren.

Berechnungen im Kreis

Formeln



M = _____

r = _____

d = _____

Kreisumfang:

$u = d \cdot \pi$

$d = u : \pi$

Fläche:

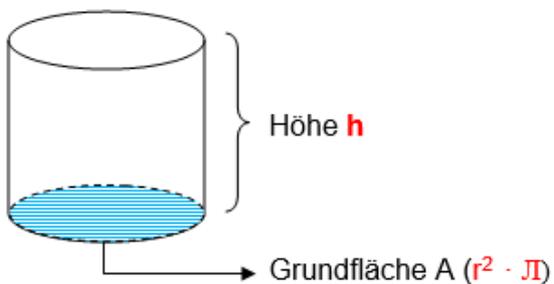
$A = r^2 \cdot \pi$

Radius: $r = \sqrt{A : \pi}$

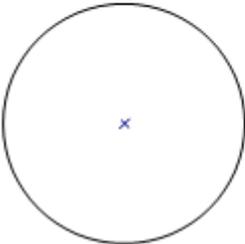
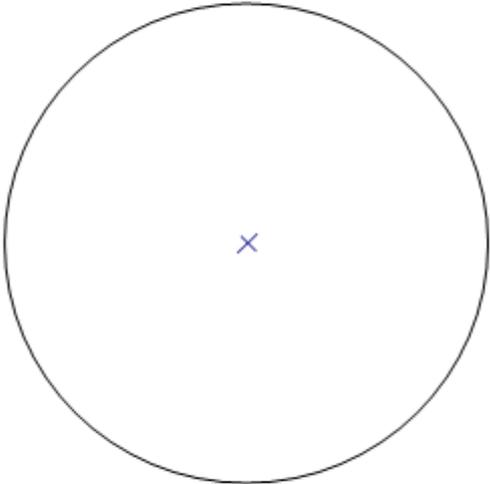
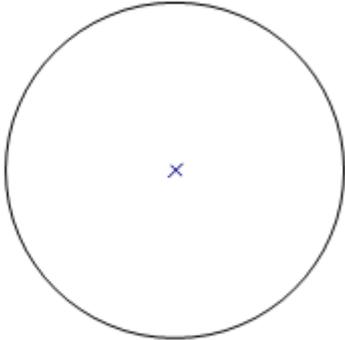
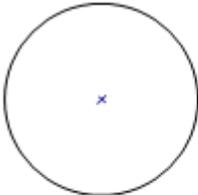
Zylinder

Volumen:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Miss die Radien der Kreise. Berechne die Flächen und die Umfänge.

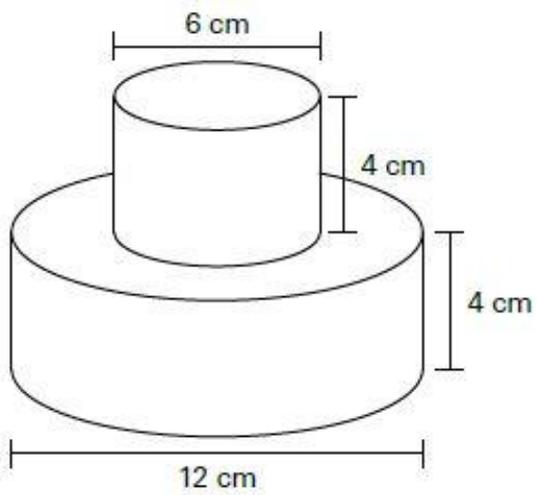
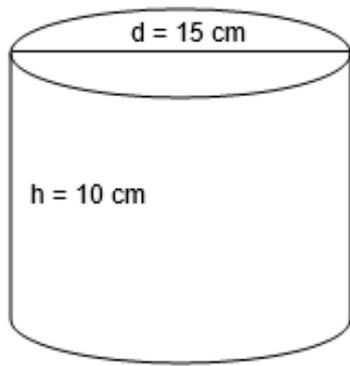
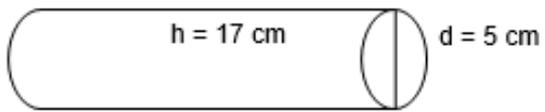
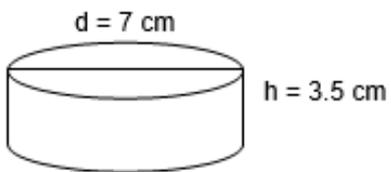
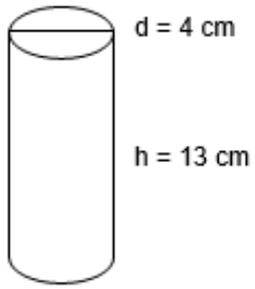


|

Berechne die fehlenden Werte in der Tabelle.

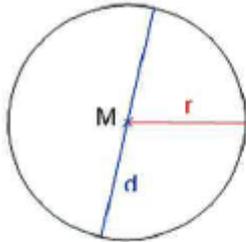
Radius r	Durchmesser	Umfang	Fläche A
6 cm			
7.5 mm			
9 m			
	25 cm		
	34 mm		
	5 m		
			314 dm ²
			452.16 m ²
			28.26 cm ²

Berechne die Grundfläche (A) und das Volumen (V) der Zylinder.



Berechnungen im Kreis

Formeln



M = Mittelpunkt

r = Radius

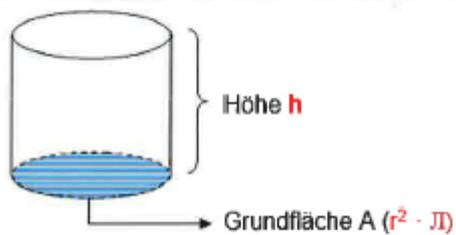
d = Durchmesser

Kreisumfang: $u = d \cdot \pi$ $d = u : \pi$

Fläche: $A = r^2 \cdot \pi$ **Radius:** $r = \sqrt{A : \pi}$

Zylinder

Volumen: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

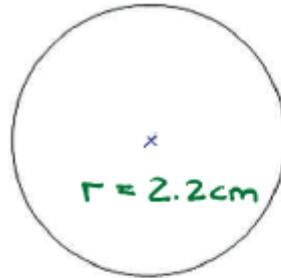


Miss die Radien der Kreise. Berechne die Flächen und die Umfänge.



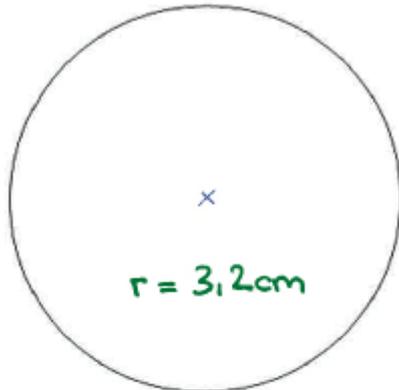
$$A = r^2 \cdot \pi = 5,3066 \text{ cm}^2$$

$$u = d \cdot \pi = 8,168 \text{ cm}$$



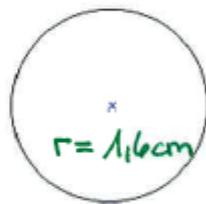
$$A = r^2 \cdot \pi = 15,1976 \text{ cm}^2$$

$$u = d \cdot \pi = 13,82 \text{ cm}$$



$$A = r^2 \cdot \pi = 32,1536 \text{ cm}^2$$

$$u = d \cdot \pi = 20,1062$$



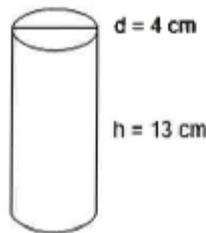
$$A = r^2 \cdot \pi = 8,0384 \text{ cm}^2$$

$$u = 10,053 \text{ cm}$$

Berechne die fehlenden Werte in der Tabelle.

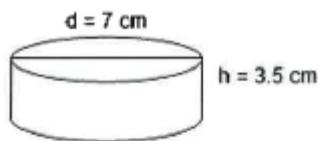
Radius r	Durchmesser	Umfang	Fläche A
6 cm	12 cm	37,7 cm	113,04 cm ²
7,5 mm	15 mm	47,1 mm	176,625 mm ²
9 m	18 m	56,5 m	254,34 m ²
12,5 cm	25 cm	78,5 cm	490,625 cm ²
17 mm	34 mm	106,8 mm	907,46 mm ²
2,5 m	5 m	15,7 m	19,625 m ²
10 dm	20 dm	62,8 dm	314 dm ²
12 m	24 m	75,4 m	452,16 m ²
3 cm	6 cm	18,8 cm	28,26 cm ²

Berechne die Grundfläche (A) und das Volumen (V) der Zylinder.



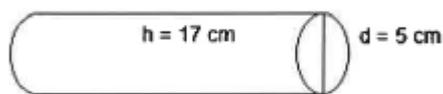
$$A = r^2 \cdot \pi = 2^2 \cdot \pi = 12,56 \text{ cm}^2$$

$$V = G \cdot h = 12,56 \text{ cm}^2 \cdot 13 \text{ cm} = 163,28 \text{ cm}^3$$



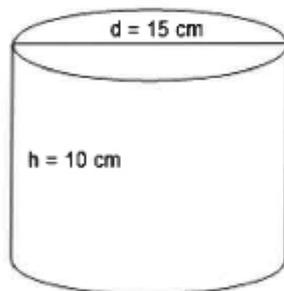
$$A = r^2 \cdot \pi = 3,5^2 \cdot \pi = 38,48 \text{ cm}^2$$

$$V = G \cdot h = 38,48 \text{ cm}^2 \cdot 3,5 \text{ cm} = 134,696 \text{ cm}^3$$



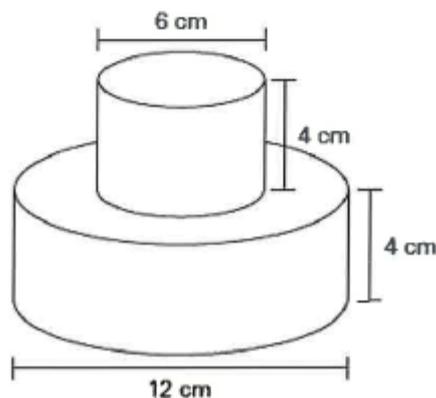
$$A = r^2 \cdot \pi = 2,5^2 \cdot \pi = 19,6 \text{ cm}^2$$

$$V = G \cdot h = 19,6 \text{ cm}^2 \cdot 17 \text{ cm} = 333,8 \text{ cm}^3$$



$$A = r^2 \cdot \pi = 7,5^2 \cdot \pi = 176,71 \text{ cm}^2$$

$$V = G \cdot h = 1767,1 \text{ cm}^3$$



$$A = r^2 \cdot \pi = 6^2 \cdot \pi = 113 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = G \cdot h = 452,39 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = r^2 \cdot \pi \cdot h = 3^2 \cdot \pi \cdot 4 = 113 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tot}} = V_1 + V_2 = 226 \text{ cm}^3$$